

ISSN 0130-2221

2018 · № 10

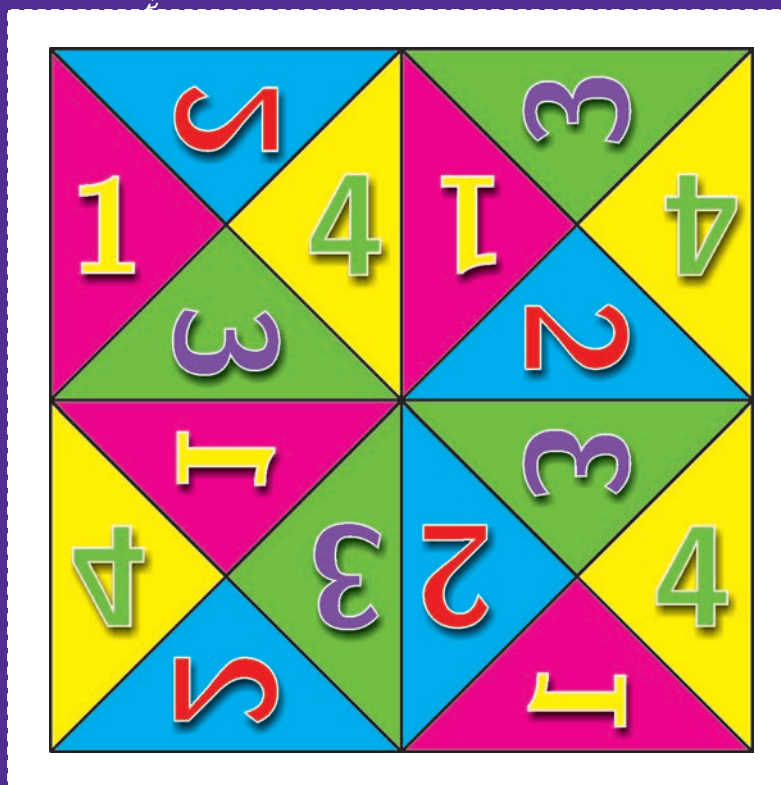
ОКТАБРЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Версостой платок



Перед вами головоломка автора из Сингапура Джерри Лу (Jerry Loo). Это квадратный платок с нанесенными на него цифрами от 1 до 4, причем каждая цифра встречается по четыре раза. Ткань такова, что рисунок с лицевой стороны проступает и на изнанку, так что, по сути, этот платок двухсторонний.

Задача: сложить платок в маленький квадрат так, чтобы с одной стороны остались цифры 1 и 2, а с другой – цифры 3 и 4, причем именно в таком порядке (если читать слева направо) и правильно ориентированные (т.е. не перевернутые вверх ногами или задом наперед).

Изготовить эту головоломку можно и из бумаги – надо только не забыть обвести цифры с оборотной стороны листа.

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 ИТЭР – сегодня. *Л.Белопухов*
6 Задача о завистливых разбойниках.
И.Иванов-Погодаев, А.Малистов

НАМ ПИШУТ

- 14 Еще раз о построении касательной

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи М2530–М2533, Ф2537–Ф2540
16 Решения задач М2518–М2521, Ф2525–Ф2528

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 22 Задачи 5–8

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи
24 «Призрачные» трубы. *Е.Бакаев, А.Веснин*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 26 Как сухое трение стало вязким. *А.Стасенко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 29 Оклеяка тетраэдра шестиугольниками.
Н.Авилов

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Астрофизика

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 35 Трение против гравитации. *М.Старшов*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 37 Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
39 Физико-математическая олимпиада «Физтех»
43 Новосибирский государственный университет
51 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (36, 50)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к «Калейдоскопу «Кванта»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

ИТЭР – сегодня

Л. БЕЛОПУХОВ

В СТАТЬЕ «ИТЭР – ЗЕМНАЯ ЗВЕЗДА» («Квант» №8 за 2018 г.) рассказывалось о возникновении идеи и о попытках воплощения ее в жизнь, приведших к созданию гигантского международного проекта ИТЭР. Самая крупная стройка XXI века приобрела уже такую известность, что сочетание букв «ИТЭР» перестали считать аббревиатурой, требующей расшифровки, а понимают как часть латинского *iter* (путешествие) – путь в энергетическое будущее человечества.

Советом ИТЭР официально заявлено, что пуск реактора состоится в 2025 году. На интернетовском сайте «ИТЭР сегодня» – сотни фотографий этой стройки. Имеются первые фотографии, когда в 2011 году был расчищен от леса и строго выверен по горизонтали целый комплекс огромных полей общим размером в несколько сотен футбольных полей. На сегодняшних снимках – грандиозная панорама самых разнообразных сооружений.

У этой панорамы есть центр – котлован круговой формы, в котором будет находиться главное сооружение установки, а

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20181001>

именно цилиндр диаметром 30 м и такой же высотой. Это – *криостат*, огромный холодильный термос, в оболочке которого будет поддерживаться температура порядка $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$ (73 K). Хладагентом будет жидкий азот, циркулирующий по трубчатым экранам, размещенным в оболочке криостата. Оболочку будут пронизывать сотни отверстий для трубопроводов ввода и вывода жидкого азота и электрических кабелей.

Внутри криостата – сердце реактора, вакуумная камера, давшая название всему устройству *токамак*. По форме она действительно представляет собою несколько искаженный тороид (тор), стоящий на поддоне и прикрытый сверху крышкой. Если строгий тороид напоминает собой баранку, то вакуумная камера реактора больше похожа на гигантский бублик или пончик, в котором периферия толще пустой центральной части. Кстати сказать, на английском научном сленге токамак так и называется *doughnut* – «пончик». Наружный диаметр этого пончика 19 м, внутренний 6 м, высота 11 м, общая масса 5000 т. Стенки вакуумной камеры выполнены из меди, упрочненной сталь-

ными деталями (делать их целиком из стали нельзя, ведь сквозь стенки камеры должны проникать внутрь магнитные поля, рождаемые магнитами, сердечники и обмотки которых расположены внутри криостата вокруг камеры). Особенно впечатляют тороидальные магниты, окружающие камеру, – как 18 лепестков еще нераспустившегося бутона. Магнитные поля проникают внутрь камеры сквозь медные «окна» и создают условия для сжатия и равновесия



плазменного шнура, в котором и происходит термоядерная реакция.

В вакуумной камере (и внутри криостата) давление не должно превышать 10^{-4} Па, что в миллиард раз меньше атмосферного давления. Для создания такого вакуума в огромном объеме криостата и вакуумной камеры 400 насосов разного типа должны работать не меньше двух недель.

Стенки вакуумной камеры – двойные. Как и стенки криостата, они представляют собой охлаждаемый термос, в котором хладагентом будет дистиллированная вода под давлением 4 МПа. Поступая с температурой 70 °С, вода с большой скоростью будет проходить сквозь стенки вакуумной камеры, нагреваясь до 120 °С и унося с собою основную часть энергии, выделяющейся в термоядерной реакции. При этом вода, покидая стенки камеры, еще только начинает закипать и шумит точь-в-точь, как начинающий закипать чайник. Этот шум будет тщательно контролироваться акустическими приборами – как показатель нормальной работы реактора. Активное кипение начинается, когда вода покидает камеру и ее давление начинает падать.

В токамаке не предусмотрено использование водяного пара для вращения турбин турбогенератора и получения электрического тока. Это не промышленный, а экспериментальный реактор. Он предназначен для отработки всех отдельных элементов термоядерного устройства. Поэтому пароводяная смесь после охлаждения, очистки и проверки на чистоту вновь будет поступать туда, где она отбирает тепловую энергию, – в «термосное» пространство стенок вакуумной камеры. В этом есть некоторое сходство с первыми атомными (плутониевыми) реакторами (1942 г., Чикаго, Э.Ферми; 1946 г., Москва, И.В.Курчатов).

Внутренние стенки вакуумной камеры, обращенные к плазменному шнуру, выложены 440 съемными *бланкетами* (одеялами). Каждая бланкета представляет собой сложную конструкцию из стали и меди с экраном площадью $1,5 \text{ м}^2$ и толщиной

10 мм, выполненным из бериллия – тугоплавкого и прочного металла, не взаимодействующего с нейтронами, а отражающего и замедляющего их.

Это и есть главные объекты токамака, принимающие на себя основную энергию термоядерной реакции – кинетическую энергию рождающихся нейтронов, имеющих огромные скорости порядка 20000 км/с. В результате многочисленных последовательных столкновений нейтроны передают свою энергию ядрам бериллия и замедляются. Бланкета нагревается, но не очень сильно (до 240 °С). Дальнейшему разогреву препятствует непрерывное омывание внутренней полости камеры водой, которая, нагреваясь, и уносит энергию реакции.

Тепловое излучение плазменного шнура, имеющего температуру 150 миллионов градусов, тоже дает немалый вклад в разогрев воды. Оставшаяся непоглощенной часть излучения проходит во внутреннее помещение к стенкам криостата и отдает свою энергию холодному жидкому азоту. Остается еще «хвостик» излучения – гамма-кванты. Для их поглощения криостат снаружи и сверху окружен мощной бетонной защитой толщиной от 1,5 до 3 метров.

Стоя за этой бетонной стеной, трудно будет представить, что внутри бушует термоядерный звездный жар. А там внутри – «стакан» криостата, окруженный разными трубами и механизмами. А внутри криостата – камера-бублик размером с трехэтажный дом, окруженная гигантскими магнитами. И если бы можно было заглянуть внутрь этого бублика, то там обнаружилось бы висящее в вакууме нестерпимо яркое кольцо водородной плазмы – источник термоядерной энергии. Как в сказке – сундук, внутри – шкатулка, в шкатулке – яичко, в нем – золотой перстень. Или, если угодно, – матрешки, каждая из которых, правда, не копирует предыдущую.

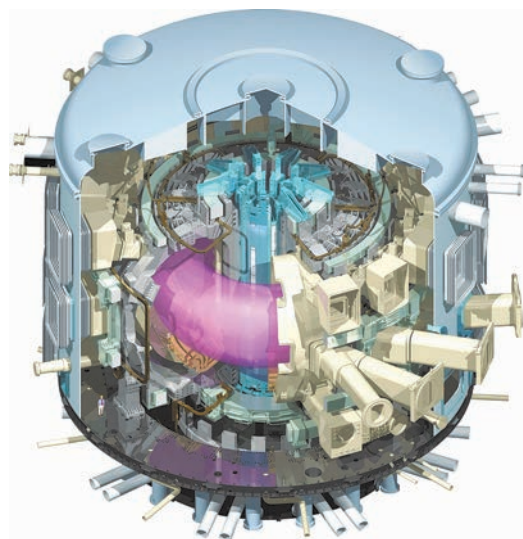
Ну, а что же строится вокруг центрального «сундука»? На снимках видны котлованы, фундаменты, стены многих сооружений и всюду – подъемные краны. А вокруг – складские помещения. Особенно

впечатляет огромное сооружение рядом с центром. Но это – всего лишь сборный цех, в котором сооружаются отдельные громоздкие детали криостата: поддон, крышка и стены холодильного «термоса». Оказывается, осуществлять надежную сварку этих деталей, состоящих из десятков отдельных стальных листов, можно только в их горизонтальном положении с тщательно проверяемым каждым сварным швом. После сварки гигантский кран будет перемещать эти детали на их постоянное место.

В этом году полностью подготовлено железобетонное основание для поддона криостата, который уже готов в соседнем здании и ждет установки на свое место. Подготовка железобетонного основания и всего фундамента под реактор – чрезвычайно ответственная операция. Ведь многотысячетонные криостат и вакуумная камера не должны испытывать ни малейших деформаций. Все возможные природные колебания грунта должны поглощаться и гаситься фундаментом и основанием.

Между поддоном криостата и его железобетонным основанием должно быть пространство для установки различных технологических устройств. Поэтому фундамент под криостатом имеет очень сложную форму, напоминающую корону. Строители так его и прозвали. Этим летом в ИТЭР-прессе было заявлено об окончании сооружения «короны». Она выполнена из совершенно необычного бетона. Его плотность в полтора раза больше, чем у обыкновенного строительного бетона. Впервые употребленный для него тяжелый гравий был доставлен из Лапландии.

Очень непроста проблема питания плазменного шнура топливом – смесью дейтерия и трития. ИТЭР, как и все предыдущие токамаки, – генератор энергии импульсного действия. Каждый импульс длится около 8 минут. За это время «сгорает» один грамм «топлива», такова масса плазменного шнура. А по выделяющейся энергии этот грамм эквивалентен 10 тоннам каменного угля. К концу импульсного периода температура в шнуре начинает падать – необходима подпитка.



Но при этом нельзя нарушать вакуум во всем криостате. Очередная порция топлива в виде «ледяных» шариков, имеющих температуру 10 К, выстреливается в вакуумную камеру. Одновременно с шариками в камеру вводится импульс высокочастотного электромагнитного поля, рождаемого специальными устройствами – электронно-циклотронными резонаторами (гиротронами). Поле частотой 50 МГц вводится в камеру через 60 окон, выполненных из поликристаллического искусственного алмаза (он прозрачен для такой частоты).

Поглощая энергию поля, шарики топлива ускоряются, ионизируются и затем под действием магнитного поля попадают в плазменный шнур, разогревая его до температуры начала термоядерной реакции. Вновь в шнуре 150 миллионов градусов и 46 тысяч ампер. Вновь нагреваются до кипения потоки воды внутри «лепестков» вакуумной камеры. И так повторяется сотни и тысячи раз, пока не придет пора заменять бериллиевые экраны в blankets, передающих энергию нейтронов воде и жидкому азоту, охлаждающему криостат.

Нельзя не остановиться на задаче создания в камере магнитных полей в десятки тесла. Для таких полей ток в обмотках магнитов должен быть не менее 60000 ампер. Это могут быть только сверхпроводящие обмотки. Используются сплавы ниобий–олово и ниобий–тантал, имеющие

нулевое сопротивление при температуре 3 К. Жгуты проводов называются *стрендами*. В один жгут в стренде скручиваются 5000 тончайших проволочек сплава (толщина каждой проволочки 6 микрометров), а 1440 стрендов скручиваются в кабель и помещаются в оболочку, внутри которой будет циркулировать жидкий гелий.

Россия уже произвела и доставила на строительную площадку 120 тонн таких кабелей для полоидальных магнитов. (Магнитное поле называется полоидальным, когда оно направлено вдоль линий, проходящих через полюсы сферической системы координат. Именно такое поле используется в токамаке для удержания плазмы в стабильном состоянии.) Их производство было организовано с нуля в 2010 году на Чепецком механическом заводе (г. Глазов, Удмуртия). В работе были задействованы и другие производства и научно-исследовательские институты, где разрабатывалось и создавалось необходимое оборудование. Совет ИТЭР высоко оценил этот вклад России в общее дело.

Для обеспечения непрерывного тока жидкого гелия и жидкого азота строится отдельное здание – «фабрика холода», где будут работать самые современные холодильные турбодетандеры и другие установки.

Очень важной задачей является выведение из вакуумной камеры главного продукта реакции – гелия. В нижней части камеры предусматриваются специальные устройства – *диверторы* (пепельницы). Часть диверторов занимают «кокосы». Так конструкторы ИТЭР прозвали слои активированного угля для поглощения ионов гелия, направляемых туда полоидальным магнитным полем. Дело в том, что наилучшим поглотителем гелия оказался уголь, полученный из сердцевин кокосовых орехов определенного вида. У диверторов есть и другие задачи. В конце каждого цикла нужно вывести из камеры недогоревшее топливо. Дейтерий и тритий разделяются и затем поступают на «фабрику» подготовки топлива.

Но основное количество топлива будет поступать в ИТЭР с заводов по производ-

ству дейтерия и трития, находящихся в других местах. Килограмм трития в настоящее время стоит 30 миллионов долларов, а ИТЭР будет расходовать полтора килограмма трития в месяц. Поэтому в проекте следующего реактора ДЕМО предусматривается получение трития непосредственно на реакторе при облучении нейтронами лития.

Задачей дивертора является и сбор бериллиевой пыли, возникающей на бланкетах во время работы реактора. Недопустимо попадание этой пыли в воздух, которым дышат люди. Во всех пунктах сбора бериллиевой пыли и ее эвакуации предусматриваются усиленные меры техники безопасности и тщательный контроль за их соблюдением.

Важнейшей частью проекта становится проектирование и разработка средств контроля и управления всеми технологическими процессами – «фабрики управления». Информация от нескольких сотен датчиков будет преобразовываться в цифровые интерфейсы, поступающие в контроллеры, языком которых будут протоколы, таблицы, диаграммы и т.п. Советом ИТЭР определено, что возглавлять эту работу и создавать большую часть контрольных приборов будут российские ученые и инженеры. Пожалуй, это будет самым существенным вкладом России в создание ИТЭР. В конце 2018 года в Москве состоится IV Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы информационных технологий, электроники и радиотехники» (ИТЭР–2018), в которой примут участие 26 научных организаций России и Казахстана.

Публикуемая статья – первый опыт популярного описания конструкции ИТЭР и современного состояния его сооружения. Автор старался ограничиваться минимумом сведений, необходимых для понимания сути дела. Но все равно этот минимум получился обширным и содержащим много количественных данных. Удалось ли при этом дать представление о масштабах проекта и его значении – судить читателю.

Задача о завистливых разбойниках

И.ИВАНОВ-ПОГОДАЕВ, А.МАЛИСТОВ

КОГДА ШКОЛЬНИКИ НАЧИНАЮТ ИЗУЧАТЬ метод математической индукции, им часто предлагается следующая классическая задача:

Несколько разбойников хотят разделить между собой награбленную кучу золотого песка. Каждый из них способен на глаз разделить кучу песка на несколько частей в любом требуемом отношении. Например, или поровну на 10 частей, или на две части в соотношении 5:6, или как-нибудь еще. При этом глазомер у всех разбойников может быть разный, т.е. они могут по-разному оценивать относительную ценность куч. Считается, что золотой песок можно делить на части сколько угодно раз, т.е. никаких неделимых частиц золота нет и даже очень маленькую кучу можно разделить на еще меньшие. Пусть разбойников n . Требуется придумать, как разбойникам разделить кучу, чтобы каждый получил не менее $1/n$ песка по своему мнению.

Решается задача нетрудно. Для двух разбойников все просто: пусть первый разделит кучу на две равные, по его мнению, части, а второй выберет, какую из них он возьмет себе. Тогда каждый будет уверен, что получил не менее половины. Будем считать, что мы научились делить кучу на k разбойников, и теперь надо научиться делить на $k + 1$. Пусть k разбойников уже разделили добычу, и пришел еще один. Предложим каждому из первых k разбойников разделить свою добычу на $k + 1$ равных по его мнению долей, а последнему разбойнику дадим право забрать у каждого одну такую долю. Тогда этот последний разбойник наберет себе не

менее $\frac{1}{k+1}$ добычи. У первых же k разбойников останется $\frac{k}{k+1}$ от их доли песка. Так как, по индуктивному предположению, у них было не менее $\frac{1}{k}$ всей кучи песка до прихода последнего, то теперь останется не менее $\frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1}$ добычи. Теперь мы умеем делить кучу на $k + 1$ разбойников, индуктивный переход завершен.

Переход можно сделать и по-другому, через правило крайнего. Попробуем выбрать самого скромного разбойника, чтобы его долю все остальные оценивали как маленькую. Предложим первому разбойнику выделить в отдельную кучу X по его мнению $\frac{1}{k+1}$ долю от всей добычи и назначим пока его *самым скромным*. Допустим, что есть другой разбойник, считающий, что это больше, чем $\frac{1}{k+1}$. Тогда теперь он у нас будет самым скромным, и мы его попросим отделить, уже по его мнению, $\frac{1}{k+1}$ добычи, отбросив часть, от X . Далее будем так переходить от разбойника к разбойнику, ища все более скромного. Этот процесс закончится, так как куча X все время уменьшается и разбойники, которые сокращали ее до размера $\frac{1}{k+1}$, больше не будут считать, что X больше, чем $\frac{1}{k+1}$. (Здесь мы используем *полуинвариант*¹ для доказательства остановки процес-

¹ Полуинвариантом здесь является количество разбойников, несогласных с тем, что куча X не превосходит $\frac{1}{k+1}$ от всего золота. С каждым уменьшением кучи X это количество строго убывает, значит, за конечное число шагов уменьшится до нуля. (Прим. ред.)

са.) Значит, в конце концов найдется самый скромный разбойник, скромнее которого уже нет никого. Пусть он заберет эту кучу X , а остальную часть добычи, которую все оценивают как не меньшую, чем $\frac{k}{k+1}$, мы можем разделить на k оставшихся разбойников по предположению индукции.

Формулировка задачи с завистью

Математики любят задавать дополнительные вопросы, усложняя условия уже решенных задач. Очень часто такое любопытство позволяет найти новые идеи и закономерности. Давайте и тут попробуем задать вопрос: «Что, если ...?»

Что, если каждый разбойник хочет не только получить $1/n$ добычи, а еще и желает получить не меньше, чем любой другой его собрат? Иными словами, разбойники теперь у нас *завидуют* друг другу. Обозначим через $m_1(X), m_2(X), \dots, m_n(X)$ мнения разбойников, какую часть от общей добычи составляет куча X . В этих обозначениях i -й разбойник согласен на часть X без зависти, если $m_i(X) \geq \frac{1}{n}$. А условие с завистью выглядит так: $m_i(X_i) \geq m_i(X_j)$, где X_i и X_j – части добычи для i -го и j -го разбойников соответственно.

Сразу видно, что для двух разбойников ничего не поменяется, схема «один делит, другой выбирает» работает и в случае зависти. Но уже для $n = 3$ начинаются проблемы (попробуйте провести то же рассуждение!). Условие зависти существенно усложняет рассуждения, вынуждая нас искать другие пути решения...

Небольшое отступление. Авторы узнали про задачу о разбойниках с завистью в июле 1999 года. Решений, кроме как для трех разбойников, никто из нас не знал. Скоро должна была состояться Летняя конференция Турнира городов, и такая задача хорошо подходила в качестве темы проекта. Авторы скорее даже обрадовало то, что решение задачи еще только предстояло найти. Правда, формат конференции предполагает, что должны быть предложены промежуточные задачи, нельзя же просто так взять и попросить решить общий вопрос.

Итак, нам предстояло наметить план решения, не зная наверняка, приведет ли он к успеху...

Задача о завистливых разбойниках активно обсуждалась и обсуждается в литературе [2–8]. В этой статье мы решим задачу, но не сразу изложим готовое решение, а расскажем, как мы к нему шли, подробно обсуждая каждую ключевую идею решения.

Случай трех завистливых разбойников

Итак, в общем случае все уж совсем непонятно, попробуем придумать алгоритм раздела хотя бы для трех разбойников. С чего начать? Логично сначала разделить добычу на три равные части по мнению первого и упорядочить их по мнению второго. Пусть это части A, B, C . Обозначим через $m_1(X), m_2(X)$ и $m_3(X)$ мнения разбойников, какую часть от общей добычи составляет куча X . В этих обозначениях мы можем записать, что $m_1(A) = m_1(B) = m_1(C)$ и $m_2(A) \geq m_2(B) \geq m_2(C)$. Эти условия удобно представить в виде трех столбиков уменьшающихся размеров (рис. 1), такими их видит второй разбойник, а первый считает их равными.

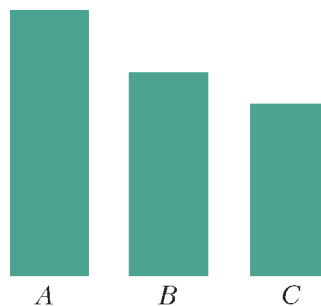


Рис. 1

Было бы неплохо, если бы какой-нибудь столбик забрал себе второй разбойник, какой-то другой – третий разбойник, и тогда оставшийся мы бы отдали первому, который все равно все столбики считает равными и возражать не будет.

Второй разбойник, конечно, из зависти хочет забрать себе самый большой по его мнению столбик. Поэтому поинтересуемся, как же наши столбики оценивает третий разбойник. Например, если третий разбойник считает, что либо B , либо C ,

либо и B , и C не меньше, чем A , то он может забрать себе B или C без зависти. Но что же делать, если и второй и третий считают A строго самым большим столбиком из трех?

Тут используется первая важная идея: попробовать выделить кучу, при разделе которой зависть частично не будет действовать. Как же это возможно? А вот как: пусть второй разобьет A на A_1 и A_2 , чтобы $m_2(A_1) = m_2(B)$, т.е. выделит в A часть A_1 , равную по его мнению B (рис. 2).

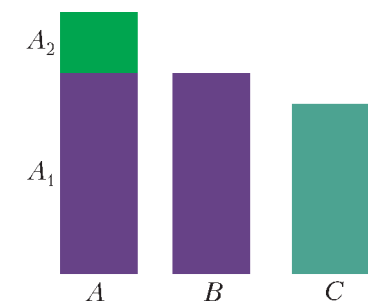


Рис. 2

Будем теперь делить между разбойниками кучи A_1 , B и C , а остаток A_2 пока отложим в сторону. Для этого остатка выполнено важное свойство: первый разбойник не будет завидовать, если A_2 заберет себе тот, кто возьмет A_1 , так как первый разбойник считает, что кучи A_1 и A_2 вместе равны B и C .

При выборе между A_1 , B и C для первого и второго разбойников существует по два варианта. Первый разбойник готов забрать себе кучу B , но у него есть и запасной вариант C , так как $m_1(B) = m_1(C)$. Второй разбойник готов без зависти забрать либо A_1 , либо B . После таких приготовлений можно попросить третьего разбойника выбрать между A_1 , B и C . Если он берет себе A_1 , второму можно отдать B , первому C . Если третьему приглянулся B , тогда второму даем A_1 , а первому C . И, наконец, если третий берет C , второму отдаем A_1 , первому B . Пока никто никому не завидует. Осталось разделить A_2 , но теперь у нас есть важное завоевание: первый не завидует второму или третьему с запасом в размер кучи A_2 (в зависимости от того, кто получил A_1)!

Теперь завершить дележ проще. Случай, когда A_1 забрал второй или третий разбойник, симметричны. Допустим, A_1 забрал второй. Попросим третьего поделить A_2 на три равные части и предложим второму выбрать из них самую большую, а первому выбрать из двух оставшихся. Последнюю часть берет третий. Этот третий считает, что при разделе A_2 взял равную остальным часть. Вторым выбирал из трех частей первым и, конечно, взял себе большую из них без зависти к остальным. Первый же не завидует третьему, потому что выбирал раньше и взял часть большую, по собственному мнению, чем досталась третьему. Ну а второму первый не завидует, так как готов был согласиться, что он заберет себе всю кучу A_2 , а не только ее часть.

Итак, что же мы сделали? Сначала мы разделили часть добычи, при этом удалив зависть первого разбойника ко второму или третьему. А потом это позволило нам завершить дележ. Это важная идея: иногда что-то не получается сделать сразу, но можно попробовать добиться выгодных условий, с помощью которых уже удобно доделать начатое.

Шаг назад: дележ без зависти в заданном отношении

Обычно, когда занимаешься трудной задачей, имеет смысл рассматривать идейно близкие вопросы. Кроме того, можно пробовать обобщать уже изученные ситуации. У нас такой ситуацией является случай с отсутствием зависти. Как же его можно обобщить?

Если добычу делят два разбойника, они могут захотеть поделить ее не поровну, а на части α и $1 - \alpha$. Пусть, для определенности, $\alpha < 1/2$. Конечно, если α — рациональное число, работает такой же алгоритм, как в общем случае. Можно просто представить, что разбойник, которому должна достаться доля p/q , — это на самом деле p разбойников, каждому из которых должна достаться доля $1/q$. А долю $1/q$ отделить легко — пусть наш разбойник разобьет добычу на q одинаковых частей, а другой пусть отдаст ему самую малень-

кую из них, по его мнению. То же самое можно сделать, если разбойников n и разбойник с номером i должен получить часть p_i/q , где $q = \sum p_i$ — общий знаменатель всех рациональных долей. Просто представим, что каждый разбойник — это на самом деле p_i разбойников.

Но что делать, если α — иррациональное число? Пусть первый разбойник разделит добычу на части α и $1 - \alpha$. Если второй не согласен, значит, первую часть он оценивает, как большую, чем α , а вторую — как меньшую, чем $1 - \alpha$. Как это использовать? Раз он считает первую часть такой ценной, пусть и забирает ее! Теперь осталось ему отдать $1 - 2\alpha$, а второму — α .

Вроде бы ситуация не изменилась? Но нет, второй-то отданную часть оценивает повыше, чем α . Пусть d — это насколько повыше, чем α , он оценивает этот кусочек. Теперь получается, что у второго образовался небольшой запас. При оставшемся разделе он может согласиться получить чуть меньше, чем $1 - 2\alpha$, главное, чтобы это «чуть» было не больше, чем d .

Мы придумали, как немного «пошевелить» мнения наших разбойников (использовали идею малых шевелений). Но как это поможет закончить дележку? Небольшое шевеление означает, что оставшуюся часть мы можем делить не в отношении $\alpha : (1 - 2\alpha)$, а в отношении $(\alpha + \delta) : (1 - 2\alpha - \delta)$, где $\delta < d$. Первый-то будет не против, что вместо α ему достанется $\alpha + \delta$. А второй не против получить на δ меньше, так как он уже забрал кусочек, который больше на d , чем он рассчитывал.

И тут нам на помощь приходит факт, что для каждого действительного числа β можно подобрать близкое к нему рациональное r . Более точно это можно сказать так: какое бы мы ни взяли маленькое положительное число ϵ , можно выбрать рациональное r такое, что разница между β и r будет меньше ϵ .

Эта идея приходит из математического анализа, где как раз и изучаются такие бесконечно малые величины. Там же доказывается, что любое действительное число можно приблизить с любой точностью рациональными числами.

ми. Как говорят, множество рациональных чисел *всюду плотно*.

Теперь мы можем завершить дележ — для рациональных-то чисел мы уже научились делить! Выберем δ так, чтобы отношение $(\alpha + \delta) : (1 - 2\alpha - \delta)$ было рационально, а дальше уже все ясно!

Также понятно, как обобщить алгоритм и разделить добычу на n разбойников в отношениях $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n$. Можно считать, что на $n - 1$ мы уже умеем делить (*принцип математической индукции*) и $n - 1$ разбойников поделили добычу в отношениях $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_{n-1}$. Теперь пришел еще один разбойник. Пусть он подойдет к каждому из остальных и проведет раздел на двоих в отношении $\alpha_n : (1 - \alpha_n)$. Так он получит свою долю, а отношения остальных долей не изменятся.

Итак, небольшое обобщение условия дало нам полезную идею: часть добычи, которую разбойники оценивают по-разному, можно рассматривать как запас. Если есть различия в оценке, то в оставшейся части добычи это можно использовать, т.е. один разбойник может чуть-чуть уступить. В случае раздела на троих с завистью мы использовали похожий прием: первый разбойник готов был согласиться, что второй заберет полностью или частично всю кучу A_2 .

Обобщенный дележ со слабой завистью

Теперь вернемся к основному случаю с завистью. На этот раз попробуем не обобщить условие задачи, а наоборот, ослабить его. Пусть пока общего алгоритма раздела нет, но, может быть, можно сделать «почти раздел», когда разбойник согласен, что кто-то получил больше, но не более чем на какое-то первоначально выбранное маленькое число ϵ . Продолжая эту мысль дальше, зададимся вопросом: могут ли разбойники разделить добычу на две равные части, причем чтобы каждый из них считал, что это соотношение выполнено с точностью до ϵ ? «С точностью до ϵ » в данном случае означает, что каждая часть отличается от $1/2$ не более чем на ϵ по мнению каждого из разбойников.

Идея тут в том, чтобы «склеить» разбойников, сделав их отличающимися друг от друга не очень сильно. Для начала разберемся с двумя разбойниками. Раз уж нам разрешено немножко нарушать соотношение, давайте разобьем сразу всю добычу на очень маленькие части, а дальше уже с помощью этих маленьких кусочков будем набирать требуемые половины. Но тут сразу возникает проблема: маленькие части могут быть маленькими только для одного разбойника, а для другого – уже нет! Ладно, допустим, первый разделил добычу в точности на две равные части, по своему мнению. Дальше применяем нашу идею (это *идея квантования*). Делим каждую из частей на много-много одинаковых маленьких кусочков (пусть их будет по m штук), чтобы каждый кусочек первый считал меньшим, чем ε . Что у нас думает второй? Ну, понятно, для него соотношение может сильно отличаться от 1:1. Пусть, для определенности, он первую часть считает большей. Давайте поменяем местами какую-нибудь пару маленьких кусочков. Для первого разбойника ничего не изменилось, он вообще эти кусочки считает одинаковыми. Для второго могло что-то измениться, а могло и нет. Но если мы поменяем так все пары, для второго точно соотношение изменится, это же будет полная замена одной половины на другую! А раз в конце для него соотношение изменится (разница между долями поменяла знак!), значит, в какой-то момент это произойдет впервые. Давайте посмотрим на наши части в этот момент. Итак, второй только что поменял кусочки A и B , до этого первая половина была для него больше, а после этого больше стала вторая.

Так пусть второй, вместо того чтобы менять местами A и B , отсыплет часть от B и прибавит ее к A , чтобы по его мнению большие половины сравнялись. Теперь у нас первый уже не будет считать эти половины одинаковыми. Но и отличаться они для него будут не сильно – он же кусочки A и B считает маленькими! Итак, для двоих мы сделали даже больше – один считает части одинаковыми, а второй одинаковыми с точностью до ε .

Значит, двух разбойников мы можем сделать близкими друг другу в смысле мнений при делении добычи пополам. Но тогда и индукцию применить нетрудно. Пусть для n разбойников мы можем разделить добычу на две части так, что один считает раздел точным, а все остальные – что различие не больше ε . Пусть эти n разбойников теперь действуют как один – сначала разделят всю добычу на две равные части с относительной точностью до $\varepsilon/8$. Потом каждую из них еще на две равные части с точностью до $\varepsilon/16$, потом еще на две с точностью до $\varepsilon/32$... И так будем продолжать делить, пока все полученные нами кусочки не будут меньше, чем $\varepsilon/2$. Суммарная погрешность при таком делении не превысит $\varepsilon/4$. Таким образом, каждый кусочек гарантированно не больше, чем $\frac{3}{4}\varepsilon$ для любого из n разбойников.

Последний, $(n+1)$ -й разбойник теперь пусть меняет местами наши кусочки, пока его мнение о том, какая часть больше, не изменится. В этот момент для последней пары A и B пусть он не меняет их местами, а пересыплет из второй части в первую необходимое количество песка, чтобы основные половины сравнялись. Тогда для него разделение будет точным, а для остальных – с точностью до $\frac{7}{8}\varepsilon < \varepsilon$: невозможно пересыпать песка больше, чем $\frac{3}{4}\varepsilon$, так как размер кучек A и B меньше, плюс начальная погрешность разделения основных половин была меньше $\frac{1}{8}\varepsilon$, а $\frac{3}{4}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon = \frac{7}{8}\varepsilon$.

Дележ со слабой завистью в заданном отношении

Теперь логично подумать опять о том, как разделить добычу не на равные части, а в соотношении $\alpha : \beta$. Причем с теми же условиями, когда один считает, что разделение точное, а остальные – что оно отличается от $\alpha : \beta$ не более чем на ε .

Похожую задачу мы уже решали – для случая без зависти. Тогда нам помогло то,

что можно найти рациональное число, не сильно отличающееся от произвольного действительного числа α . А что мы умеем сейчас? Делить пополам с произвольной точностью! Значит, мы можем отмерять части, равные $1/2, 1/4, \dots, 1/2^k$, — достаточно лишь несколько раз поделить пополам одну и ту же часть. Стоп, но ведь тогда может накапливаться наша погрешность. Если сто раз поделить с погрешностью δ , то и погрешность может стать равной $100\delta \dots$

Все так, но ведь мы можем управлять погрешностью. Вот пусть нам нужно отделить $1/2^{100}$. Разделим сначала с погрешностью $\delta/2$, потом с погрешностью $\delta/4$, потом с погрешностью $\delta/8$ и в последний раз с погрешностью $\delta/2^{100}$. Как оценить суммарную погрешность $\delta/2 + \delta/4 + \dots + \delta/2^{100}$?

Допустим, $S_n = \delta/2 + \delta/4 + \dots + \delta/2^n$. Как можно получить S_{n+1} ? Добавить $\delta/2^{n+1}$ к S_n . Или еще способ: умножить S_n на $1/2$ и добавить $\delta/2$. Но тогда $S_n/2 + \delta/2 = S_{n+1}$, т.е. $S_n = 2S_{n+1} - \delta$. (Тут мы применили идею подсчета двумя способами.) Итак, $\delta/2 + \delta/4 + \dots + \delta/2^{100} = 2S_{100} - \delta = 2(\delta/2 + \delta/4 + \dots + \delta/2^{100}) - \delta = \delta - \delta/2^{100} < \delta$. Ясно, что вместо 100 тут можно поставить любое число. Значит, выбирая δ и уменьшая вдвое погрешность на каждом шаге, мы можем добиться того, чтобы суммарная погрешность при любом числе делений не превышала δ .

Хорошо, мы можем отделять доли $1/2, 1/4, \dots, 1/2^k$, а также их суммы. Но тогда можно подобраться к любому числу α с заданной погрешностью ε .

Достаточно выбрать такое k , чтобы $1/2^k < \varepsilon/2$. Единичный отрезок можно разделить на 2^k отрезков, каждый из которых имеет длину $1/2^k$. Число α попадет в один из отрезков между $m/2^k$ и $(m+1)/2^k$ (рис.3). Это будет означать,

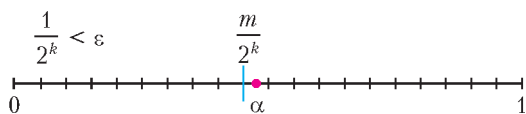


Рис. 3

что его можно приблизить рациональным числом $m/2^k$ со знаменателем 2^k .

Пока мы разделили добычу с точностью до ε у всех разбойников. Теперь можно улучшить алгоритм, чтобы один думал, что раздел точен. Опять воспользуемся идеей с выравниванием одной маленькой части. Выберем какое-нибудь очень большое число m , разделим всю добычу на m равных частей с погрешностью ε/m^2 . Теперь опять один набирает сколько нужно частей, а одну часть делит, как считает нужным. Делимую долю все оценивают не более чем $1/m + \varepsilon/m^2$. А отличие мнений по всем остальным долям, которые набрал разбойник, составляет не более $m \cdot \varepsilon/m^2 = \varepsilon/m$. Таким образом, по мнению остальных набранная доля отличается от нужной не более чем на $(2 + \varepsilon)/m$. Поскольку мы сами выбираем m , эту погрешность можно сделать такой маленькой, как нам хочется.

Итак, наш арсенал доступных действий увеличился. Теперь мы можем делить в произвольном отношении с любой заданной точностью. Причем один разбойник будет считать, что раздел произведен точно в этом отношении. А что если мы вообще все разделения добычи будем делать так, чтобы все разбойники с ним соглашались с какой-то точностью? Причем эту точность можно уменьшать в два раза при каждом следующем разделе, и тогда суммарная погрешность тоже будет маленькой! Теперь можно приступить к основной задаче точного раздела с завистливыми разбойниками.

Точный дележ с завистью

Конечно, тут опять надо действовать по индукции, и база для двух и для трех разбойников уже есть. Допустим, мы уже умеем делить на n разбойников, и надо научиться это делать для $n + 1$.

Нас несколько ограничивает то, что наш основной прием, когда все согласны с разделением с некоторой точностью, это не точная дележка. И при разделе на равные части разбойники все равно могут завидовать друг другу. Как же бороться с этой завистью? Идея состоит в следую-

щем: если некоторый маленький кусок добычи несколько разбойников оценивают как больший, чем δ_2 , а остальные – как меньший, чем δ_1 , и $\delta_1 < \delta_2$, то мы можем принять $\varepsilon = \delta_2 - \delta_1$. Теперь если отдать этот кусок первой группе, то вторая группа не будет завидовать первой в пределах ε , т.е. у нас появляется тот самый небольшой запас, чтобы задавать точность дальнейших разделений и применить ту технику, которую мы придумали. Любопытно, что если просто какую-либо маленькую часть добычи все разбойники оценивают неодинаково, то мы можем упорядочить их оценки по возрастанию: $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k < \mu_{k+1} \leq \dots \leq \mu_n$ и, взяв любые две неодинаковые последовательные оценки $\mu_k < \mu_{k+1}$, разделить разбойников на две описанные выше группы: в первую группу войдут разбойники с оценками не меньше $\delta_2 = \mu_{k+1}$, а во вторую группу – с оценками не больше $\delta_1 = \mu_k$.

Если мы отдадим такой кусок первой группе разбойников, между собой они его смогут поделить по предположению индукции, это понятно. Но отдав маленький кусочек части разбойников, остальную добычу придется делить уже не поровну, а в некотором соотношении, и для этого случая у нас нет предположения индукции!

Что же делать? Давайте опять обобщим условие. Будем рассматривать не раздел поровну на n завистливых разбойников, а раздел с некоторым назначенным правилом $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n$. Условие зависти тут будет обобщенное: каждый относительно любого другого хочет получить долю не меньшую, чем предполагает заданная пропорция. Выразим это так. Пусть A_{ij} – это то, как оценивает i -й разбойник j -й кусок добычи. Тогда для любой пары i и j должно быть верно неравенство $A_{ii}/A_{ij} \geq \alpha_i/\alpha_j$. Иными словами, i -й разбойник оценивает отношение своей доли к доле j -го разбойника как не меньшее, чем отношение их долей в назначенном правиле. Если все α_i равны 1, то получается обычная задача деления поровну с завистью.

Если теперь осуществлять раздел с обобщенным условием зависти, то и индуктивное предположение можно тоже использовать с обобщенным условием, а это уже гораздо удобнее! Но, правда, нам надо передоказать базу. Впрочем, база для двух разбойников – это как раз задача про раздел в соотношении $\alpha : \beta$. Для двух-разбойников завистливый случай от завистливого не отличается.

Окончательный алгоритм

Вернемся теперь к задаче с обобщенным условием зависти. Допустим, для числа разбойников от 1 до $n - 1$ мы делить уже умеем. Нам нужно сделать индуктивный переход. Попробуем оформить все идеи и построения, которые мы до этого придумали. Пусть первый разбойник разделит добычу в исходных пропорциях. Если все согласны, то алгоритм завершен. В противном случае найдется кусок I , который часть разбойников оценивает больше некоторого числа φ (назовем ее группой 1, пусть это первые s разбойников), а другая часть – меньше φ (группа 2).

Можно считать, что кусок I все считают маленьким, т.е. меньшим любого выбранного наперед числа. Действительно, мы же можем поделить I на миллиард одинаковых частей с погрешностью, меньшей чем максимальная оценка I среди разбойников. Кроме того, можно считать, что ровно в φ никто кусок I не оценивает (см. рассуждения выше).

Заметим, что разностей между оценками разбойниками куска I и числом φ всего n , у первой группы они положительные, у второй – отрицательны. Значит, можно выбрать такое маленькое положительное число ω , которое меньше, чем модули всех этих n разностей. Тем самым, в пределах ω вторая группа не будет завидовать первой.

Этот кусок I предназначается группе 1, пока отложим его. А остальную добычу разделим на две части A и B в отношении $(\alpha_1 + \dots + \alpha_s - \varphi) : (\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n)$ так, чтобы все согласились с этим делением с точностью до ω . Тогда как оценивает группа 1 два куска A и I вместе?

Каждый из группы 1 эти два куска в сумме считает строго большими, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$, т.е. больше, чем полагающееся всей группе количество добычи! Раз каждый считает $A + I$ строго большим, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$, значит, можно выбрать такое положительное число δ_1 , что каждый из первой группы считает $A + I$ большим, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + \delta_1$.

Используемый нами тут прием: *если $X > Y$, то можно выбрать такое положительное число a , что $X > Y + a$* , также довольно типичен для математического анализа. Из строгости неравенства мы можем извлекать некоторый запас для дальнейших построений.

А что же со второй группой? Каждый из них считает части $A + I$ меньше, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$ (эти-то считают I меньшим φ). Значит, остальное, т.е. часть B , каждый из них считает больше, чем $\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n$. И опять можно выбрать такое δ_2 , что каждый из второй группы оценивает часть B как большую, чем $\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n + \delta_2$.

Итак, уже виден свет в конце туннеля: нам удалось разделить разбойников на две группы, выделить этим группам доли, да еще все уверены, что им достается чуть больше, чем нужно, т.е. у нас появляется столь необходимый запас! Выберем δ как минимальное из δ_1 и δ_2 , чтобы дальше работать с одним числом, символизирующим наш запас точности. Теперь, в соответствии с нашим планом, мы должны воспользоваться индуктивным предположением, чтобы первая группа разделила на своих разбойников объединенный кусок $A + I$, а вторая – кусок B .

Почему мы при этом не превысим наш запас точности? Выберем ϵ много меньше δ . Теперь посмотрим на процесс дележа, который нам предоставляется индуктивным предположением. Этот денеж состоит из последовательности элементарных делений, когда какой-то разбойник делит что-то в каких-то пропорциях. Так пусть такие элементарные деления проводятся таким образом, чтобы все остальные были согласны, причем с точностью,

которая растет в два раза при каждом следующем элементарном делении.

Тем самым, первый раздел пусть проводится так, чтобы все остальные n разбойников согласились с точностью до $\epsilon/2$, второй – чтобы все согласились уже с точностью до $\epsilon/4$, и так далее. Иными словами, если проводится k -й раздел (неважно, каким разбойником), то все остальные соглашаются с ним с точностью до $\epsilon/2^k$. При таком проведении разделов получится, что мнения любых двух разбойников по любым двум непересекающимся кускам добычи могут различаться только менее чем на ϵ .

Теперь проверим, что зависти действительно не будет. Внутри первой группы никакие два разбойника друг другу не завидуют, по предположению индукции. Аналогично внутри второй группы. Рассмотрим разбойников из разных частей. Их мнения по полученным кускам могут разойтись не более чем на ϵ , причем $\epsilon \leq \delta_1$ и $\epsilon \leq \delta_2$, т.е. погрешности раздела незначительны по сравнению с имеющимися у нас запасами. При этом каждый разбойник думает, что он получил чуть больше, чем полагается (так как на всех было выделено чуть больше). Алгебраически это можно выразить так: $A_{ii}/\alpha_i > 1$. А про разбойников из другой части каждый из них думает, что они получили меньше, чем им положено: $A_{ij}/\alpha_j < 1$. Но тогда $A_{ii}/\alpha_i > A_{ij}/\alpha_j$. И следовательно, $A_{ii}/A_{ij} > \alpha_i/\alpha_j$, т.е. условие зависти выполняется.

Эпилог

Подведем итоги нашей работы. Ключ к задаче удалось подобрать, когда мы немного поиграли с условием: сначала чуть ослабили его, потом чуть усилили, рассмотрев обобщенное условие зависти. Ключевыми являются две идеи. Первая – рассмотрение деления добычи с некоторой точностью. И вторая – возможность замены элементарного раздела на последовательность разделов, но уже таких, чтобы все были согласны с разделом с какой-то точностью. Эти две идеи – основные, но кроме них есть еще несколько

второстепенных технических идей: использование куска, который оценивается неодинаково, для создания запаса; оформление алгоритма в виде индуктивного; использование разделов с быстро увеличивающейся точностью (сходящийся ряд). Многие из этих идей широко известны и часто применяются в различных ситуациях. Очень полезно владеть широким набором таких технических идей. Их богатый арсенал позволяет подходить к задаче с разных сторон, а это уже помогает нащупать путь для решения.

Интересно, что в комбинаторной задаче работают методы малых величин, типичные для анализа. Из-за этого найденный алгоритм не очень эффективен на практике. Мы даже не можем оценить, каким будет число разделов в зависимости от n . Значит, в этой задаче еще есть над чем поработать. Для интересующихся данной темой есть набор статей. Может быть, кому-то из читателей удастся придумать собственный алгоритм раздела!

Литература

1. И.А.Иванов, А.Я.Канель-Белов, С.И.Кублановский, А.С.Малистов. Задача о разбойниках. – Избранные материалы Летней кон-

ференции Турнира городов, том 1, 2009, с. 71–82.

2. W.Stromquist. How to cut a cake fairly. – The American Mathematical Monthly, vol. 87, №8, 1980, pp. 640–644.

3. S.J.Brams, A.D.Taylor. An envy-free cake division protocol. – The American Mathematical Monthly, vol. 102, №1, 1995, pp. 9–18.

4. S.J.Brams, A.D.Taylor, W.S.Zwicker. A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division. – Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 1997, pp. 547–554.

5. W.Stromquist. Envy-free cake divisions cannot be found by finite protocols. – The Electronic Journal of Combinatorics, R11, 15, 2008.

6. A.D.Procaccia. Thou shalt covet thy neighbor's cake. – Proceedings IJCAI'09, pp. 239–244.

7. H.Aziz, S.Mackenzie. A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for any number of agents. – Preprint, <https://arxiv.org/abs/1604.03655>

8. H.Aziz, S.Mackenzie. A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for four agents. – Preprint, <https://arxiv.org/abs/1508.05143>

Работа поддержана грантом РФФ №17-11-01337. Первый автор является лауреатом премии «Молодая математика России».

НАМ ПИШУТ

Еще раз о построении касательной

В статье Д.Швецова «Поляра» («Квант» №5 за 2017 г.) показано, как с помощью одной линейки из точки *вне* окружности провести к этой окружности касательные. Наш постоянный автор и читатель И.Вайнштейн заметил, что это построение позволяет проводить касательную к окружности и через точку, лежащую *на* окружности.

Приведем построение из письма И.Вайнштейна.

Пусть на окружности дана точка E (рис.1). Через эту точку проведем секущую (не через центр окружности), которая пересечет окружность в точке F . Возьмем на прямой EF произвольные точки B и D вне окружности и из них проведем касательные к окружности так, как это указано в статье «Поляра». Пусть соответствующие точки пересечения касательных – A

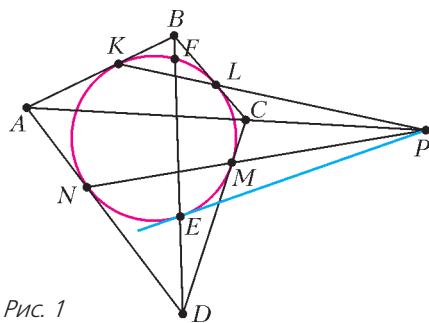


Рис. 1

и C , а точки касания – K, L, M, N . Пусть прямые KL и MN пересекаются в точке P . Тогда PE – искомая касательная.

В самом деле, нетрудно доказать, что прямая AC тоже проходит через точку P , прямые NK и ML пересекаются на прямой BD , а точки

(Продолжение см. на с. 25)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2531 и M2532 предлагались на III Олимпиаде мегаполисов.

Задачи M2530–M2533, Ф2537–Ф2540

M2530. В остроугольном треугольнике на сторонах BC , CA , AB взяты точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно так, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Известно, что $BC \cdot AA_1 = CA \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1$. Докажите, что AA_1 , BB_1 , CC_1 – это высоты треугольника.

П. Кожевников

M2531. Пусть k – натуральное число и $1 = d_0 < d_1 < \dots < d_m = 4k$ – все положительные делители числа $4k$. Докажите, что найдется $i \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $d_i - d_{i-1} = 2$.

И. Митрофанов

M2532. Аня и Максим играют в игру на клетчатой доске 100×100 . Сначала Аня заполняет клетки доски целыми числами от 1 до 10 000 так, что каждое число встречается по одному разу. Затем Максим ставит фишку на одну из клеток самого левого столбца по своему выбору. Далее он за несколько ходов передвигает фишку в самый правый столбец. За один ход он может передвинуть фишку из клетки в любую соседнюю с ней по вершине или стороне. За каждую посещенную клетку (включая изначальную) Максим платит Ане такое число монет, которое написано на этой клетке. Максим хочет заплатить как можно меньше, Аня же хочет получить как можно больше. Сколько монет

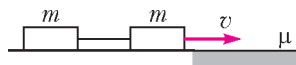
заплатит Максим, если каждый из них будет действовать наилучшим для себя образом?

Л. Шабанов

M2533*. Дан тетраэдр. Пусть a и b – длины двух противоположных ребер тетраэдра, α и β – величины двугранных углов при этих ребрах; c и d – длины ребер в другой паре противоположных ребер, γ и δ – величины двугранных углов при этих ребрах. Докажите, что $a + b = c + d$ тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

М. Панов

Ф2537. Два одинаковых бруска сцеплены жесткой невесомой штангой и движутся по гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). В некоторый момент



бруски начинают въезжать на шероховатый участок стола. Найдите коэффициент трения μ брусков о шероховатую поверхность, если они в начале движения имели скорость v , а после прохождения шероховатого участка стола движутся со скоростью u . Длина каждого бруска l , штанги s , шероховатого участка стола $l + s$.

А. Иванов

Ф2538. Зимой помещение отапливается с помощью нагревателя, который на своей

поверхности поддерживает постоянную температуру $t_1 = 70^\circ\text{C}$. При температуре воздуха на улице $t_2 = -30^\circ\text{C}$ установившаяся температура в помещении равна $t_3 = 10^\circ\text{C}$. Какая температура воздуха установится в помещении, если в разных углах этого помещения разместить два таких нагревателя? Считайте, что мощность теплопередачи пропорциональна разности температур.

А.Иванов

Ф2539. На закрепленную непроводящую тонкую жесткую спицу длиной L насажена маленькая бусинка, имеющая массу m и электрический заряд Q . В начальный момент бусинка находится в центре спицы и относительно спицы имеет нулевую скорость. Коэффициент трения между спицей и бусинкой равен $\mu < 1$. Перпендикулярно спице расположена очень длинная (полу-бесконечная) непроводящая нить, начинающаяся на одном из концов спицы и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда γ . Какой будет скорость бусинки в тот момент, когда она покинет спицу?

В.Гребень

Ф2540. Перпендикулярно оптической оси тонкой собирающей линзы расположена тонкая палочка длиной l . Палочка находится за фокусом линзы на расстоянии a от ее центра. При этом увеличение длины палочки равно Γ_1 . Затем палочку располагают вдоль оси линзы так, что ее центр лежит на оси линзы на расстоянии a от нее, причем палочка целиком находится за фокусом линзы. Найдите увеличение Γ_2 длины палочки в этом случае.

А.Иванов

Решения задач М2518–М2521, Ф2525–Ф2528

М2518. Графики двух квадратных трехчленов пересекаются в точках A и B (рис. 1). Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB , они пересекают второй график в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс.

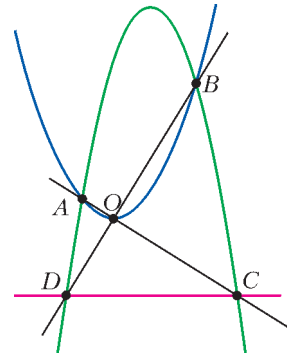


Рис. 1

Обозначим график первого трехчлена G_1 , а второго — G_2 . Для начала перенесем всю картинку таким образом, чтобы точка O совпала с началом координат, и выберем такой масштаб, чтобы G_1 совпал с графиком функции $y = x^2$. Пусть точка A имеет координаты $(a; a^2)$, точка B — координаты $(b; b^2)$. Заметим, что разность квадратных трехчленов, задающих графики G_1 и G_2 , есть квадратный трехчлен, который обращается в ноль в точках a и b . Из этого следует, что график G_2 задается уравнением $y = x^2 + k(x - a)(x - b)$ для некоторого действительного числа k , отличного от 0 и -1 .

Прямая OA задается уравнением $y = ax$, тогда точка C может быть найдена как решение системы $y = ax$, $y = x^2 + k(x - a)(x - b)$. Приравняв правые части, получаем уравнение $x^2 + k(x - a)(x - b) = ax$. Одно из решений этого уравнения $x = a$, поэтому второе по теореме Виета равняется $kb/(1 + k)$; подставляя это выражение в уравнение $y = ax$, получаем $y = kab/(1 + k)$. Заметим, что последнее выражение симметрично относительно a и b , поэтому если мы проделаем все те же действия для точек B и D , мы получим то же самое значение y . Но тогда ординаты точек C и D равны, откуда и следует, что CD параллельна оси абсцисс. Задача решена.

Заметим, что утверждение задачи является предельным случаем следующего более общего факта, который можно назвать параболическим аналогом факта для окружностей, известного как *лемма Фусса*:

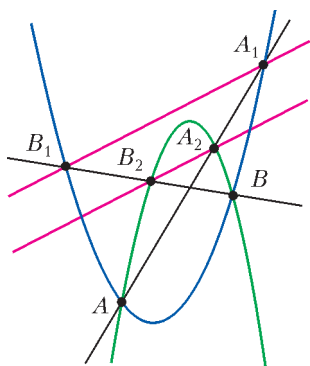


Рис. 2

Пусть две параболы G_1 и G_2 (с параллельными осями) пересекаются в точках A и B (рис.2). Пусть прямая, проходящая через A , пересекает вторично G_2 в точке A_i ($i = 1, 2$), а прямая, проходящая через B , пересекает вторично G_1 в точке B_i . Тогда $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

А.Антропов, П.Кожевников

M2519. Назовем способ разбиения множества из $2n$ натуральных чисел на n пар бесквадратным, если ни в одной паре произведение чисел не является квадратом натурального числа. Известно, что для данных $2n$ различных натуральных чисел существует бесквадратный способ разбиения на пары. Докажите, что в таком случае существует не менее $n!$ бесквадратных способов разбиения этих $2n$ чисел на пары.

Каждому натуральному числу m поставим в соответствие множество простых чисел $P(m)$, каждое из которых входит в разложение числа m в нечетной степени. Например, $P(2^3 \cdot 7^8 \cdot 11) = \{2, 11\}$, $P(3^4 \cdot 5^6) = \emptyset$. Очевидно, произведение натуральных a и b является точным квадратом тогда и только тогда, когда множества $P(a)$ и $P(b)$ совпадают.

Покрасим данные $2n$ чисел таким образом: числа, для которых множества $P(m)$ совпадают, покрасим в один и тот же цвет, а для которых множества $P(m)$ отличаются – в разные цвета. Поскольку существует бесквадратное разбиение на пары, в каждый цвет покрашено не более n чисел. Докажем следующую лемму, из которой сразу следует решение задачи.

Лемма. Пусть $2n$ (различных) объектов покрашены в несколько цветов так, что в каждый цвет покрашено не более n объектов. Тогда существует не менее $n!$ способов разбить эти объекты на разноцветные пары (т.е. так, чтобы в каждой паре были объекты разных цветов).

Доказательство леммы. Проведем индукцию по n . База $n = 1$ очевидна. Докажем переход от $n - 1$ к n . Выберем цвет c , который встречается среди данных объектов наибольшее количество раз, т.е. пусть имеется k объектов цвета c , а объектов любого другого цвета не более k . Возьмем объект A цвета c и подберем для него пару B любого цвета d , отличного от c ; это можно сделать $2n - k$ способами. При этом $2n - k \geq n$, так как $k \leq n$. Удалив пару A, B , мы получаем множество из $2(n - 1)$ объектов. Проверим, что их покраска удовлетворяет условию леммы. Действительно, предположим противное, и объектов какого-то цвета e не меньше n . Цвет e отличен от c и d , так как после удаления A и B объектов каждого из цветов c и d осталось не более $n - 1$. Тогда $k \geq n$, и до удаления объектов A и B цвета c и e занимали по n объектов – противоречие (по меньшей мере еще есть объект B цвета d). Таким образом, мы можем воспользоваться предположением индукции. Значит, на каждый способ выбрать объект B для полученного множества из $2(n - 1)$ объектов имеется не менее $(n - 1)!$ разбиений на разноцветные пары. Итого для множества из $2n$ объектов – не менее $n(n - 1)!$ разбиений на разноцветные пары. Лемма доказана, что завершает решение задачи.

Укажем подход к другому решению. Введем вспомогательный граф: числам поставим в соответствие вершины (итого $2n$ вершин), а ребрами соединим пары вершин, для которых произведение чисел не равно точному квадрату. Нетрудно доказать, что в таком графе выполнено следующее условие переклечения: если есть пара ребер AB и CD , где A, B, C, D – некоторые четыре различные вершины, то либо также есть пара ребер AC и BD , либо есть пара ребер AD и BC (условие пере-

ключения эквивалентно нашей задаче для $n = 2$).

Итак, наш граф удовлетворяет следующим свойствам: (i) существует *паросочетание* (т.е. n ребер таких, что из каждой вершины выходит ровно одно ребро); (ii) выполняется условие переключения. Можно показать (используя индукцию по n), что в любом графе, удовлетворяющем условиям (i) и (ii), существует не менее $n!$ паросочетаний. Из этого утверждения сразу вытекает утверждение задачи.

В заключение обсудим еще одну возможную идею. Если удалось покрасить данные $2n$ чисел в два цвета, по n чисел в каждый цвет, то «разноцветных» разбиений на пары (т.е. таких, что в каждой паре числа разных цветов) будет $n!$. Если бы удалось покрасить данные $2n$ чисел в два цвета, по n чисел в каждый цвет, так, чтобы любая «разноцветная» пара была бесквадратной, то это дало бы решение задачи. Однако эта идея в общем случае не работает. Одним из контрпримеров является набор чисел (для $n = 3$): $a^2, b^2, 2c^2, 2d^2, 3e^2, 3f^2$.

П.Кожевников

M2520. На изначально пустую доску 8×8 одна за другой выставляются фишки. Фишку можно ставить только в клетку, которая граничит по стороне хотя бы а) с двумя; б) с тремя свободными клетками. Какое наибольшее число фишек мы можем выставить на доску по таким правилам?

а) **Ответ:** 56.

Докажем, что для любой доски $n \times n$ ответ будет $n^2 - n$.

Оценка. Введем вспомогательный граф, вершинами которого будут клетки, а ребра проводятся между вершинами, у которых соответствующие им клетки граничат по стороне. Как только фишка ставится в очередную клетку, будем удалять все ребра, выходящие из соответствующей вершины. Заметим, что тем самым будут удаляться в точности ребра между вершиной, куда ставят фишку, и ее свободными соседями. Значит, после каждого выставления фишки должно удаляться не менее двух ребер.

Посчитаем общее количество ребер во введенном графе. Оно равно $2n(n-1) = 2n^2 - 2n$ (n вертикальных рядов по $n-1$ ребер и столько же горизонтальных рядов). Так как при выставлении одной фишки мы должны удалить хотя бы два ребра, то количество выставленных на доску фишек не превосходит $\frac{2n^2 - 2n}{2}$, т.е. $n^2 - n$.

Пример. Назовем диагональ доски, идущую из левого верхнего угла в правый нижний, *главной*. Будем выставлять фишки диагоналями, идя от диагонали, состоящей из одной клетки, к главной. На очередную диагональ фишки можно выставлять в любом порядке (рис.1). Клетки главной диагонали остаются пустыми.

	50	44	39	35	32	30	29
22		51	45	40	36	33	31
16	23		52	46	41	37	34
11	17	24		53	47	42	38
7	12	18	25		54	48	43
4	8	13	19	26		55	49
2	5	9	14	20	27		56
1	3	6	10	15	21	28	

Рис. 1

Интересна связь данной задачи с известной задачей о бурьяне, предлагавшейся на Московской олимпиаде 1986 года:

Квадратное поле разбито на 100 одинаковых участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки соседние, если они имеют общую сторону). Докажите, что полностью все поле бурьяном не зарастет.

Если в нашей задаче мы рассмотрим обратный отсчет времени и, наоборот, будем удалять фишку, если она граничит хотя бы с двумя свободными клетками, то процесс освобождения доски станет эквивалентным процессу распространению бурьяна.

б) **Ответ:** 36.

Пример изображен на рисунке 2.

Оценка. Используем соображения со вспомогательным графом из решения пункта

	14		21		22		
1		13		35	23	36	
	15	12	20		24		6
2		11		33	25	34	
	16	10	19		26		5
3		9		31	27	32	
	17	8	18		28		4
		7		29	30		

Рис. 2

а). Всего в нашем графе 112 ребер. При выставлении одной фишки мы должны удалить хотя бы три ребра. Кроме того, ребра в четырех крайних рядах могут быть удалены только при выставлении фишки в граничную клетку доски. Но при выставлении фишки в граничную клетку удаляются сразу два ребра из крайнего ряда. Таким образом, в каждом крайнем ряду из семи ребер в конце концов останется хотя бы одно.

Значит, удалено не более $112 - 4 = 108$ ребер, тем самым, выставлено не более $108/3 = 36$ фишек.

Решить задачу б) для любой доски $n \times n$ весьма непросто. Решению этой общей задачи будет посвящена отдельная статья.

Д.Белов, В.Брагин

M2521. В каждую клетку таблицы $n \times n$ Мортеза поместил некоторую функцию $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$ (т.е. всего n^2 функций, каждая из которых определена на отрезке $[0; 1]$ и принимает значения из отрезка $[0; 1]$). Павел хочет поместить слева от каждой строки и снизу под каждым столбцом еще по одной функции $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$ (т.е. еще $2n$ функций) так, чтобы для любой строки и любого столбца было выполнено следующее условие: если под этим столбцом помещена функция f , слева от строки помещена функция g , а в пересечении этого столбца и этой строки помещена функция h , то для любого $x \in [0; 1]$ верно равенство $h(x) = f(g(x))$. Докажите, что Павел всегда сможет осуществить свой замысел.

Обозначим функцию, стоящую в пересечении i -й строки и j -го столбца, через h_{ij} .

Наша цель подобрать функции для строк f_1, f_2, \dots, f_n и для столбцов g_1, g_2, \dots, g_n , чтобы для любых $1 \leq i, j \leq n$ было выполнено тождество $h_{ij}(x) = f_i(g_j(x))$. (Иначе говоря, мы хотим превратить данную таблицу из функций h_{ij} в «таблицу умножения» относительно операции композиций функции.) Расположим внутри отрезка $[0; 1]$ n непересекающихся отрезков $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n]$. Сделаем функции g_j линейными так, чтобы $g_j(0) = a_j$ и $g_j(1) = b_j$ (т.е. $g_j(x) = (b_j - a_j)x + a_j$). Теперь нужно определить функции f_i . Так как $g_j(x) \in [a_j; b_j]$, то тождество $h_{ij}(x) = f_i(g_j(x))$ однозначно определяет значения функции f_i на этом самом отрезке. Действительно, если $x_0 \in [a_j; b_j]$, то для некоторого x_1 выполнено $g_j(x_1) = x_0$ (а именно, $x_1 = \frac{x_0 - a_j}{b_j - a_j}$). Тогда $f_i(x_0) = h_{ij}(x_1)$. Пробегая по всем j , находим значения f_i на всех отрезках $[a_j; b_j]$. Так как отрезки не пересекаются, то такую функцию f_i подобрать можно. Вне выделенных отрезков определим значение f_i равным нулю. Из построения совершенно понятно, почему все тождества $h_{ij}(x) = f_i(g_j(x))$ выполнены.

В.Брагин, М.Сагафиян

Ф2525. Школьник Вася наловчился так стрелять из рогатки, что величина скорости «снаряда» сразу после выстрела всегда одна и та же. Если Вася стреляет из своего окна, расположенного на высоте $h = 5$ м от земли, в горизонтальном направлении, то снаряд падает на землю на расстоянии $d = 30$ м по горизонтали от точки выстрела. Сможет ли Вася поразить мишень – небольшое темное пятно на стене дома напротив, стреляя из рогатки из окна своего дома, если пятно находится на том же уровне над землей, что и окно, а расстояние до дома напротив $l = 87$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². (Окон на стене дома напротив нет!)

После выстрела в горизонтальном направлении «снаряд» падает на землю в течение времени $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1$ с, поэтому начальная скорость снаряда равна $v = \frac{d}{t} = 30$ м/с.

Если скорость сразу после выстрела составляет с горизонтом (или с вертикалью) угол $\alpha = 45^\circ$, то дальность полета по горизонтали будет равна

$$L = v \cos \alpha \cdot 2 \frac{v \sin \alpha}{g} = \frac{v^2}{g} = 90 \text{ м}.$$

Это больше, чем расстояние $l = 87$ м от окна Васи до стены дома напротив. Следовательно, подобрав подходящий угол, Вася сможет поразить мишень.

Е. Никулин

Ф2526. В высокий цилиндрический сосуд с поперечным горизонтальным сечением $S = 25 \text{ см}^2$ высыпали $N = 50$ ледяных кубиков с ребром $l = 1$ см и налили масло плотностью $\rho_{\text{м}} = 900 \text{ кг/м}^3$. Оказалось, что ровно половина кубиков находится выше уровня масла. На сколько изменится верхний уровень масла, когда весь лед растает? Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 917 \text{ кг/м}^3$, воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Пусть V_0 – объем одного кубика льда, $V_{\text{м}}$ – объем налитого в сосуд масла. Тогда можно записать такие соотношения: до таяния льда (рис.1)

$$H_0 S = \frac{N}{2} V_0 + V_{\text{м}},$$

после таяния льда (рис.2)

$$H = h_1 + h_2 = \frac{V_{\text{м}}}{S} + \frac{N V_0 \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} S}.$$

Отсюда находим искомое изменение уров-

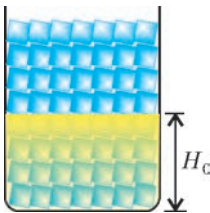


Рис. 1

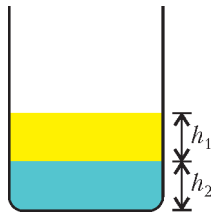


Рис. 2

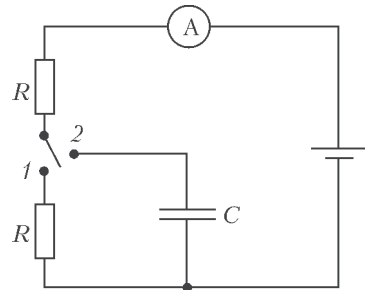
ня масла:

$$\begin{aligned} \Delta H = H - H_0 &= \frac{N V_0}{S} \left(\frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= -8,34 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx -8 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Значит, уровень масла понизился примерно на 8 мм.

Е. Никулин

Ф2527. В электрической схеме, изображенной на рисунке, $R = 100 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ Ф}$.



Когда ключ находится в положении 1, амперметр показывает ток $I_1 = 0,1$ А. Когда ключ перекинули в положение 2, амперметр в первое мгновение зарегистрировал ток $I_2 = 0,15$ А. Какова величина ЭДС батарейки? Какое количество теплоты выделилось в резисторе после переброски ключа? Какую работу совершили сторонние силы в батарейке за промежуток времени от момента переключения до момента, когда амперметр снова показал ток 0,1 А?

Обозначим ЭДС батарейки через \mathcal{E} . Ясно, что $\mathcal{E} = I_1 \cdot 2R = 20$ В. Будем считать, что в положении ключа 1 амперметр показывает положительное значение тока. Сразу после переброски ключа в положение 2 амперметр мог показать +0,15 А, а мог показать –0,15 А. Это означает, что конденсатор до переброски ключа мог быть заряжен по-разному. Либо его верхняя (по рисунку) пластина имела потенциал больший, чем нижняя, на $\mathcal{E}/4$, и тогда ток после переброски ключа равен $\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}/4}{R} = +0,15$ А. Либо верхняя пластина конденсатора имела потенциал, больший потенциала нижней пластины, на $7\mathcal{E}/4$, тогда ток после переброски ключа

равен $\frac{\varepsilon - 7\varepsilon/4}{R} = -0,15 \text{ А}$. Начальный запас энергии в батарееке и в конденсаторе равен $CU^2/2 + W$, где U – это напряжение на конденсаторе до переброски ключа, W – энергия батарееки. Запас энергии после переброски ключа и установления равновесия равен $C\varepsilon^2/2 + (W - \varepsilon q)$, где q – заряд, прошедший по цепи во время перезарядки конденсатора. В первом случае, при $U_1 = \varepsilon/4$, этот заряд равен $q_1 = 3C\varepsilon/4$. Во втором случае, при $U_2 = 7\varepsilon/4$, этот заряд равен $q_2 = -3C\varepsilon/4$. В результате количество теплоты, выделившееся в резисторе, в первом случае равно

$$Q_1 = \left(\frac{C(\varepsilon/4)^2}{2} + W \right) - \left(\frac{C\varepsilon^2}{2} + \left(W - \frac{3C\varepsilon^2}{4} \right) \right) = \frac{9C\varepsilon^2}{32} = 112,5 \text{ Дж},$$

а во втором случае –

$$Q_2 = \left(\frac{C(7\varepsilon/4)^2}{2} + W \right) - \left(\frac{C\varepsilon^2}{2} + \left(W + \frac{3C\varepsilon^2}{4} \right) \right) = \frac{9C\varepsilon^2}{32} = 112,5 \text{ Дж}.$$

Как видно, количество теплоты, выделившееся в резисторе за время установления равновесия, в обоих случаях одно и то же. К моменту, когда амперметр снова покажет ток 0,1 А, напряжение на резисторе уменьшится от значения $3\varepsilon/4$ до значения $\varepsilon/2$. Это соответствует тому, что через батарееку прошел заряд, равный по модулю $C\varepsilon/4$. А работа батарееки будет либо положительной и равной $+C\varepsilon^2/4 = 100 \text{ Дж}$ (в первом случае батареека отдает энергию во внешнюю цепь), либо отрицательной и равной $-C\varepsilon^2/4 = -100 \text{ Дж}$ (во втором случае батареека получает энергию из внешней цепи).

О.Фарадов

Ф2528. По внутреннему однопровитному проводу коаксиального кабеля можно пропустить максимальный постоянный ток $I = 30 \text{ А}$ (при большем токе плавится

изоляция). А максимальное напряжение, которое выдерживает изоляция провода, равно $U = 1000 \text{ В}$ (при большем напряжении изоляция пробивается). Завод из тех же материалов выпустил опытную партию кабеля, у которого все линейные размеры вдвое больше, чем у стандартного кабеля. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю из опытной партии, если напряжение в электрической сети $U_0 = 220 \text{ В}$? А какова будет максимальная мощность, если напряжение установить максимально возможным?

Изоляция кабеля пробивается в том месте, где напряженность электрического поля самая большая, т.е. вблизи поверхности внутреннего провода (центральной жилы). Максимальное допустимое напряжение определяется максимальной напряженностью электрического поля в изоляторе, которая для данного материала изолятора какая-то определенная величина, умноженной на радиус металлического провода внутри изоляции:

$$U = E_{\max} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{R_{\min} dx}{x} = E_{\max} R_{\min} \ln \frac{R_{\max}}{R_{\min}}.$$

Поскольку линейные поперечные размеры всех элементов кабеля увеличились вдвое, то напряжение, которое выдержит изоляция, тоже выросло вдвое – до $U_{\max} = 2U = 2000 \text{ В}$, но в сети напряжение все равно только 220 В.

Изоляционный материал начинает плавиться в том месте, где самая высокая температура, т.е. опять же вблизи поверхности внутренней жилы коаксиального кабеля. Поток тепла через изоляцию наружу при установившемся режиме одинаков через любую цилиндрическую поверхность длиной L , охватывающую центральную жилу кабеля. Поэтому выполняется такое соотношение:

$$W = \beta L \cdot 2\pi x \frac{dT}{dx},$$

где β – коэффициент теплопроводности, x – расстояние от оси симметрии центральной жилы, dT/dx – градиент температуры. Расстояние x изменяется от минимального размера R_{\min} до максимального раз-

мера R_{\max} , тогда

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{W}{\beta L \cdot 2\pi x}.$$

Отсюда получаем

$$T_{R_{\min}} = T_{R_{\max}} + \frac{W}{\beta L \cdot 2\pi} \ln \frac{R_{\max}}{R_{\min}}.$$

Из этого соотношения следует, что поток тепла наружу, приходящийся на единицу длины кабеля, должен остаться тем же самым. Значит, мощность джоулевых потерь на единицу длины при максимальной силе тока тоже должна остаться прежней.

Поскольку сопротивление центрального провода уменьшилось в 4 раза, максимальный ток может быть увеличен в 2 раза. В результате через опытный кабель от сети напряжением $U_0 = 220$ В можно будет передать максимальную мощность

$$P_{\max} = 2I \cdot U_0 = 13,2 \text{ кВт}.$$

А при отсутствии ограничений на напряжение максимальная мощность будет равна

$$P_{\max}^* = 2I \cdot U_{\max} = 120 \text{ кВт}.$$

А.Вольтов

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

5. Найдите наименьшее натуральное число такое, что и в его записи, и в записи удвоенного числа встречаются все десять цифр от 0 до 9.

С.Дворянинов

6. Постройте четырехугольник периметра 18 и площади 16, все стороны которого имеют нечетную длину.

С.Костин

7. а) В зале музея стоят по кругу 5 одинаковых шкапулок. Каждый вечер начальник охраны запирает 2 шкапулки по своему выбору, положив в одну из них бесценный алмаз. Подкупленный работник музея видит действия начальника и хочет оставить взломщику подсказку, где алмаз. Для этого он открывает крышки ровно у двух незапертых шкапулок, а остальные не трогает. Как ему заранее договориться со взломщиком, чтобы тот,

придя ночью в музей и увидев, у каких двух шкапулок открыты крышки, сразу понял, где лежит алмаз?

б) Та же задача, но в зале стоят по кругу 33 шкапулки, начальник запирает 16 шкапулок, положив в одну алмаз, а взломщик должен понять, где алмаз, по двум шкапулкам, у которых открыты крышки.

Е.Бакаев, П.Живцов

8. Дан выпуклый десятиугольник. Его вершины покрасили в пять цветов так, чтобы было по две вершины каждого цвета, затем пары вершин одного цвета соединили пятью отрезками. Пусть среднее арифметическое их длин равно m . Рассмотрим наибольшую из тех диагоналей десятиугольника, которые делят его на два шестиугольника. Пусть ее длина равна k . Докажите, что $m \leq k$.

Е.Бакаев, П.Кожевников

Задачи

1. Мальчики и девочки стоят в ряд по убыванию роста:

мммддммдддммддддммммдмдд.

Какое наибольшее количество пар для



танца они могут образовать так, чтобы в каждой паре мальчик был выше девочки?

Е.Бакаев

2. Число ДЮЖИНА делится на 12, а число ГРОСС — на 144. Найдите С. Гросс (от нем. groß — большой) — старая мера счета, равная дюжине дюжин.

С.Токарев



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXIV Турнире математических боев имени А.П.Савина.

3. На острове живут только правдолюбывы (всегда говорят правду), лжецы (всегда лгут) и хитрецы (в разговоре с лжецом лгут, а в остальных случаях говорят правду). Трое островитян, Эник, Беник и Вареник, сказали друг другу:



Эник — Бенику: «Ты хитрец».

Беник — Варенику: «Нет, я не хитрец».

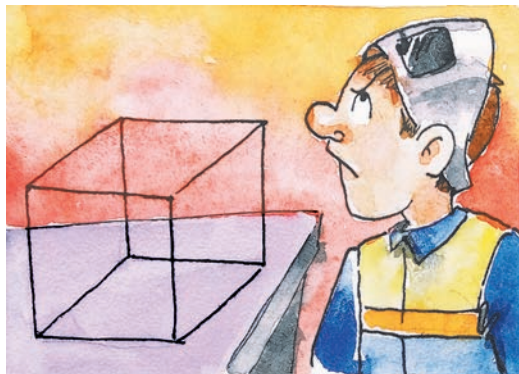
Вареник — Энику: «Да среди нас вообще нет хитрецов!»

Сколько лжецов участвовало в этом разговоре?

И.Раскина

4. Разрежьте проволочный каркас куба на наименьшее количество частей, из которых можно спаять каркасы двух кубов, если сгибать проволоку нельзя.

С.Токарев



«Призрачные» трубы

Е. БАКАЕВ, А. ВЕСНИН

ТЕПЛОВАЯ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЯ СЕНДЗЮ в Токио работала с 1926 по 1963 год. Ее «призрачные» трубы остались на многих фотографиях и фильмах того времени и стали одним из символов региона.

У электростанции было 4 огромных дымовых трубы высотой 83,5 метра и шириной 5–6 метров. На момент постройки они были самым высоким сооружением в Токио. Почему их стали называть «призрачными»?

Предлагается два возможных объяснения. Согласно первому, дым из этих труб выглядел как призрак — эта электростанция была запасной, и дым появлялся редко и неожиданно.

По другой версии, трубы так назвали из-за их интересного свойства: в зависимости от того, с какой стороны издали посмотреть на электростанцию, казалось, что труб 4, 3, 2 или даже только 1. Например, на рисунке 1 видно 4 трубы.



Рис. 1

Как могут располагаться трубы, чтобы это свойство выполнялось? Ниже представлено решение, но рекомендуем читателю сначала подумать над этим вопросом самостоятельно.

Схема расположения труб была примерно такой, как на рисунке 2 (вид сверху). Трубы обозначены четырьмя кружками, их центры образуют вытянутый ромб. Стрелками показаны 4 направления, с которых можно увидеть нужное число труб.

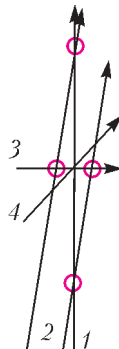


Рис. 2

При взгляде вдоль первого направления будет казаться, что стоит одна широкая труба (рис.3), потому что ближняя труба будет загораживать одну из труб и просвет между другими двумя.



Рис. 3

Второе направление идет параллельно сторонам ромба, и если посмотреть издали, то две трубы будут почти целиком загораживать две другие (рис.4).

Если посмотреть с третьего направления, то одна труба будет полностью закрыта, а другие три видны (рис.5).

Все четыре трубы видно со многих направлений, например с четвертого.

В качестве упражнения придумайте, как можно расположить 5 труб, чтобы с разных ракурсов можно было увидеть все количества труб от 1 до 5. Предлагаем



Рис. 4



Рис. 5

также решить аналогичную задачу для 6 труб.

Информация и фотографии, опубликованные Tokyo Electric Power Company, взяты со страницы v.ht/tepco сайта adachi.ne.jp. Другие кадры «призрачных» труб можно увидеть, например, в начале фильма «Там, где видны фабричные трубы» (см. youtu.be/e48UsS5BY54).

(Начало см. на с. 14)

пересечения диагоналей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$ совпадают. Затем достаточно использовать основную теорему статьи «Поляра».

Понятно, что одним построением можно провести касательные через две данные точки (E и F), если только эти точки не являются концами одного диаметра.

Данное построение выглядит изящно, правда, не строит забывать, что здесь мы дважды использовали непростую «подпрограмму» построения касательных из точки, лежащей вне окружности. Обсуждая данную тему, вспомним еще одно классическое построение касательной к окружности через точку, лежащую на этой окружности.

Помимо данной точки E выберем на окружности еще четыре точки: A, B, C, D (рис. 2). Проведем прямые AB, BC, CD, DE, EA (для точек в конфигурации рисунка 2 получилась

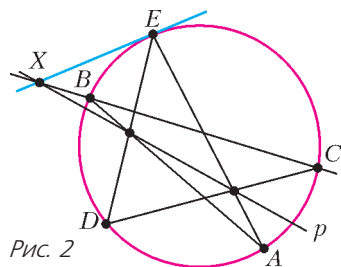


Рис. 2

пятиконечная звезда). Далее проведем прямую p через точки пересечения пар прямых AB, DE и EA, CD . Пусть X – точка пересечения прямых BC и p (в общем случае эти прямые не будут параллельны). Тогда прямая XE и будет нужной касательной. Обоснование этого способа опирается на теорему Паскаля для шестерки точек $ABCDEE$ (с кратной точкой E): если шесть точек A, B, C, D, E, F лежат на окружности, то точки пересечения пар прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой. У нас точки E и F слились в одну точку E и вместо прямой EF берется касательная на окружности в точке E . Отметим, что здесь нам потребовалось провести всего семь прямых (седьмая проведенная прямая – уже требуемая касательная).

В заключение посмотрим, как меняется наша задача на построение, если помимо линейки мы позволим себе использовать и циркуль. В коллекции интерактивных задач по геометрии Euclidea (www.euclidea.xyz) имеется такая: построить касательную к окружности через точку, лежащую на этой окружности, проведя всего три линии (третья линия должна быть требуемой касательной). Это красивое построение мы помещаем в конце журнала. Читатель может попробовать самостоятельно придумать решение и убедиться, насколько добавление циркуля делает «мощнее» набор инструментов.

Как сухое трение стало ВЯЗКИМ

А. СТАСЕНКО

*И хоть мгновенно вино,
когда цедишь его, протекает,
Но потихоньку идет и сочится ленивое масло;
Иль потому, что его, очевидно,
крупней элементы,
Иль крючковатей они
и спутаны больше друг с другом...*

Лукреций. О природе вещей (1 в. до н. э.)

Первым пришел в чувство Том Бекас. Он снял чулок и принялся тереть им джентльменов. Джентльмены не замедлили очнуться.

А.П.Чехов. Летящие острова (XIX в. н. э.)

ТАЙНЫ ПОВСЕМЕСТНОГО И НЕУСТРАНИМОГО трения тысячи лет волнуют людей. И вот как-то прошел слух, что сила сухого трения не зависит от скорости, а вязкого – пропорциональна ей. Для проверки этих утверждений один Способный ученик создал несложную установку (рис.1), в кото-

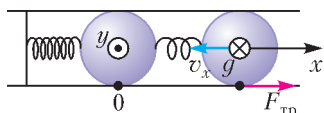


Рис. 1. Шарик на пружине в трубке с шероховатой внутренней поверхностью (вид сверху, ось y перпендикулярна плоскости листа). При отклонении шарика вправо возвращающая сила направлена влево

рой можно при помощи невесомой нити переместить шарик из точки $x = 0$, когда пружина не напряжена, в точку $x > 0$, тем самым растянув пружину и создав возвращающую силу, равную $-kx$ (здесь k – жесткость пружины). Затем, отпустив нить, можно предоставить шарiku двигаться внутри трубки под действием активной возвращающей силы и, конечно, тормозящей силы

трения, величина которой определяется прижимающей силой $F_y = mg_y$ и коэффициентом трения μ : $F_{\text{тр}} = F_x = mg_y \mu$. Здесь уже специально расставлены индексы, показывающие, куда какая сила направлена.

Понятно, что сила трения направлена против скорости движения (на то она и тормозящая), так что уравнение движения шарика в начале, когда $v_x < 0$, можно записать в виде

$$ma_x = -kx + mg_y \mu. \quad (1)$$

Строго говоря, шарик под действием пары сил (трения и жесткости пружины) должен поворачиваться вокруг горизонтальной оси; но эти повороты можно предотвратить конструктивно – например, надев шарик на спицу, проходящую по оси пружины.

Тут Способный ученик решил упростить уравнение, введя новую переменную $x' = x - x_*$, где $x_* = \frac{mg_y \mu}{k}$. Затем он использо-

вал тот факт, что скорость движения есть изменение расстояния Δx с изменением времени Δt , т.е. $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, а ускорение – это

изменение скорости, т.е. $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$, так что

добавление постоянных величин к координате x не изменяет значения скорости и ускорения: $a'_x = a_x$, $v'_x = v_x$. И тогда уравнение (1) примет вид

$$ma'_x = -kx'. \quad (2)$$

Но ведь это – уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а гармонические колебания не затухают. Они изображаются линейной комбинацией функций $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ (рис.2,а; черный пунктир), а на плоскости смещение–скорость $(x - v_x)$ – окружностью, по которой вечно бежит изображающая точка (рис.2,б; черный пунктир); такая плоскость называется фазовой. Это движение по окружности на фазовой плоскости соответствует закону сохранения механической энергии шарика (суммы кинетической и потенциальной энергий):

$$\frac{mv_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}.$$

Значит, тут нет никаких потерь!

А как же трение? Ведь это одна из диссипативных сил, приводящих к превращению механической энергии в тепловую. И тут

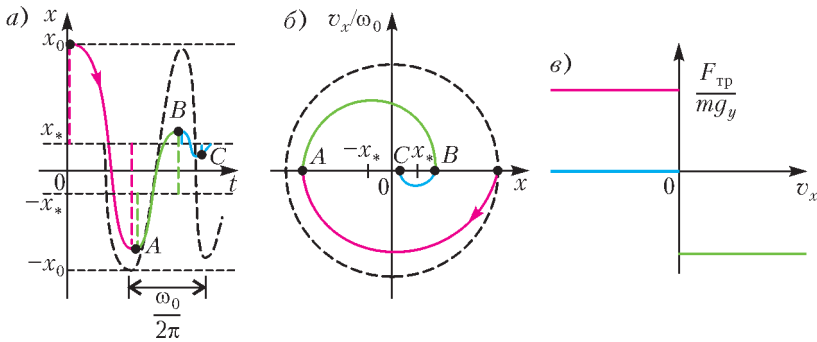


Рис. 2. а) Изменение x со временем состоит из кусков синусоид. В точках А и В происходит переключение знака (направления) силы сухого трения, в точке С шарик останавливается. б) Фазовая плоскость колебаний при сухом трении — чередующиеся полуокружности с центрами в точках $+x_*$, $-x_*$, $+x_*$. в) Зависимость силы сухого трения от скорости — кусочно-постоянная

Способного ученика осенило: даже если верно принятое предположение о независимости величины силы трения от скорости тела, то все равно нужно учесть зависимость от направления последней. Это значит, что шарик, двигаясь влево под действием возвращающей силы упругости пружины и проскочив за счет инерции положение равновесия ($x = 0$), сожмет пружину, на мгновение остановится, а затем начнет двигаться вправо. Но при этом изменится и знак силы трения: теперь она будет направлена влево, опять же противоположно направлению скорости. Так что в уравнении (1) силу трения правильнее записать так: $F_{\text{тр}} = F_x = -mg_y \mu \cdot \text{sign } v_x$, где $\text{sign } v_x$ — разрывная функция, означающая просто «знак v_x ». Она называется еще ступенчатой, кусочно-постоянной, релейной (переключающей). График этой силы трения приведен на рисунке 2, в. Таким образом, вектор силы сухого трения очень даже зависит от скорости, хотя одна из физических моделей предполагает постоянство его модуля.

Согласно рисунку 2, а (см. цветные линии), совершив конечное число колебаний, шарик окажется в полосе застоя $-x_* < x < x_*$ с нулевой скоростью (точка С на рисунках 2, а, б), при этом часть запасенной в начальный момент энергии останется в виде потенциальной энергии все еще слегка сжатой пружины. Во всех точках этой полосы деформации пружины недостаточно, чтобы преодолеть силу трения. Конечное число колебаний — характерный признак наличия сухого трения. При остановке почти вся

кинетическая энергия переходит в тепловую. Поэтому на морозе и трут носы (см. эниграф).

И тут Способному ученику пришла мысль пренебречь силой тяготения (например, поставить смелый опыт в падающем лифте или в кабине спутника), но при этом вращать трубку вокруг оси, проходящей через точку закрепления пружины, с постоянной угловой скоростью ω_y (рис.3). Тогда скорость

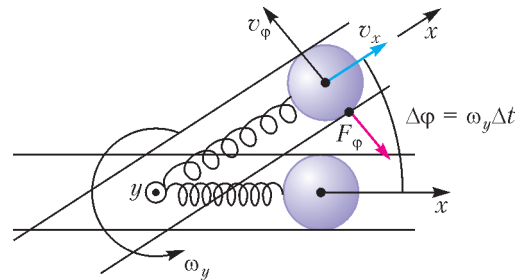


Рис. 3. Трубка с шариком вращается с постоянной угловой скоростью ω_y . При движении шарика вдоль оси трубки возникает прижимающая сила F_ϕ , направленная вправо относительно направления движения

шарика в неподвижной системе координат будет иметь две компоненты: радиальную v_x и азимутальную $v_\phi = \omega_y x$. Перемещаясь вдоль оси x за время Δt на расстояние Δx , шарик будет попадать в области все больших значений x , а значит, все больших значений скорости v_ϕ , и будет «чувствовать», что справа на него все время давит стенка трубки. А он, в свою очередь, давит на вращающуюся трубку, пытаясь сохранить (по инер-

ции) радиальное направление своего движения. Тут можно вспомнить, что в северном полушарии вращающейся Земли у всех рек правые берега крутые – не случайно города строились на них.

Эти рассуждения приводят к мысли о том, что при радиальном перемещении шарика со скоростью v_x в трубке, вращающейся с угловой скоростью ω_y , на него действует прижимающая сила, пропорциональная про-

ентом вязкости) – и мы получим выражение касательного напряжения для так называемых ньютоновских жидкостей. Динамика вязкой жидкости интересовала философов-физиков еще в древности (см. эпиграф).

Возьмем, например, шарик радиусом r , движущийся в жидкости с вязкостью η (рис.5,б). Площадь поверхности шарика равна $S = 4\pi r^2$, характерное изменение скорости обтекающей жидкости при перемеще-

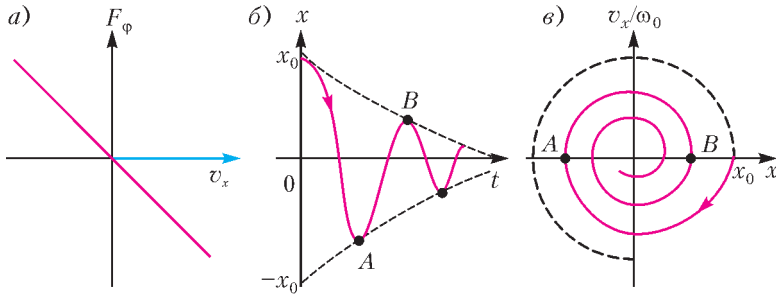


Рис. 4. а) Зависимость прижимающей силы, а значит, и силы вязкого трения от скорости. б) Зависимость от времени колебаний шарика, затухающих под действием силы сухого трения, которая стала пропорциональной радиальной скорости. в) Фазовая траектория затухающих колебаний

изведению этих величин (рис.4,а):

$$F_\phi \sim m v_x \omega_y.$$

(Точный вывод дает еще множитель 2, но не будем утомлять себя дополнительными выкладками и скажем только, что полученная сила называется силой Кориолиса.) Как тут не полюбоваться индексами: они указывают, что три вектора направлены по трем взаимно перпендикулярным осям! Но самое интересное – прижимающая (а при наличии сухого трения и тормозящая) сила оказалась пропорциональна скорости движения шарика, как если бы он падал вместе в пружинной в банке с вязким маслом!

А что значит «вязкость»? Силу сопротивления вязкой среды рассматривал еще Ньютон, исходя из вполне прозрачных соображений. А именно: если жидкость течет (вдоль некоторой площадки) с «продольной» скоростью v_x , изменяющейся на величину Δv_x на поперечном расстоянии Δy (рис.5,а), то возникает тормозящая сила, или касательное напряжение $\frac{F_x}{S} \sim -\frac{\Delta v_x}{\Delta y}$. Знак «минус» уже учитывает, что эта поверхностная сила – тормозящая. Осталось подставить коэффициент η (он-то и называется коэффици-

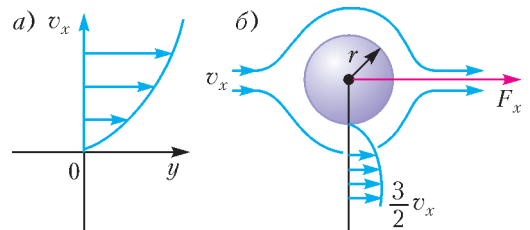


Рис. 5. К определению: а) коэффициента ньютоновской вязкости; б) стоксовой силы, действующей на шарик, обтекаемый вязкой жидкостью

нии с полюса на экватор, т.е. на расстояние порядка его радиуса ($\Delta y \sim r$), равно по порядку величины $\frac{v_x}{r}$. Значит, сила сопротивления будет порядка

$$F_x \sim \eta S \frac{v_x}{r} = 4\pi r v_x \eta.$$

Это так называемая сила Стокса (если еще вместо 4 подставить 6).

Итак, сила вязкого трения пропорциональна скорости движения шарика. Что же изменилось в поведении шарика? Теперь его колебания стали затухать плавно, теоретически бесконечно долго, как показано качественно на рисунке 4,б. А на фазовой

плоскости его движение изобразится в виде скручивающейся спирали (рис.4,в). Сравните рисунок 4,в с рисунком 2,б – и вы получите удовольствие, как и наш Способный ученик.

Впрочем, кому нужен этот шарик в трубке... Вот громадный самолет – это да. Но, казалось бы, какую роль может играть вязкость воздуха (которая к тому же в сотню раз меньше вязкости воды, не то что масла) в судьбе летательного аппарата? Однако играет. Оказывается, от нее зависит очень важное явление – так называемый отрыв потока на крыле (сравните рисунки 6,а и б), в результате которого резко падает подъемная сила на больших углах атаки – когда самолет «задирает нос».

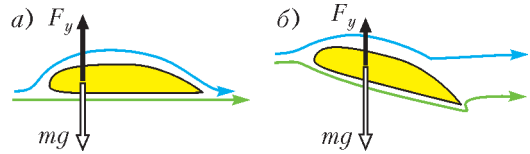


Рис. 6. Линии тока воздуха вокруг профиля крыла самолета: а) хорошее обтекание, б) плохое (отрывное) обтекание – задняя поверхность крыла «не работает»

Конечно, как в случае сухого, так и вязкого трения, все определяется взаимодействием молекул. Но чтобы во всем этом разобраться, следует поступить в Московский физико-технический институт на факультет аэромеханики и летательной техники.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Оклейка тетраэдра шестиугольниками

Н.АВИЛОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ ПОЙДЕТ РЕЧЬ О КОНКУРСНОЙ задаче №4998 из журнала «Математика в школе»:

Можно ли поверхность правильного тетраэдра оклеить (без пропусков и перекрытий) одинаковыми правильными шестиугольниками?

Скажем сразу, что ответ на вопрос задачи положительный. На рисунке 1 показано шесть решений задачи из их бесконечного множества.

В каждом из решений основой развертки тетраэдра является параллелограмм, состоящий из четырех правильных треугольников. На этот параллелограмм наложен многоугольник, содержащий несколько правильных шестиугольников. Если многоугольник,

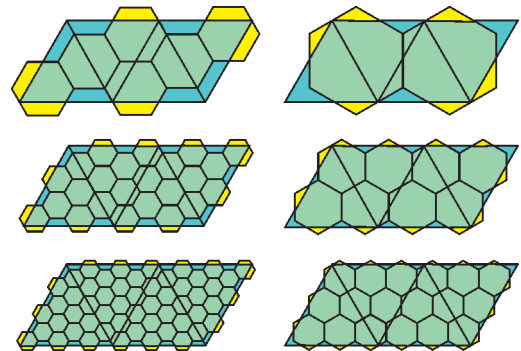


Рис. 1

составленный из правильных шестиугольников, перегнуть по сторонам всех треугольников, то при складывании тетраэдра из треугольной развертки будет складываться тетраэдр из шестиугольников, при этом шестиугольники покроют поверхность тетраэдра полностью, без пропусков и перекрытий.

Уточним, что в первой серии решений (см. рис.1; левый столбец) вне параллелограмма находится несколько трапеций, и ровно столько же таких трапеций не накрыли параллелограмм, причем при складывании тетраэдра «выступающие» трапеции как раз займут место «недостающих» трапеций в развертке.

Во второй серии решений (см. рис.1; правый столбец) ситуация похожая, разница лишь в том, что здесь роль трапеций выполняют треугольники.

Можно было бы поставить точку – ведь задача решена, приведены конкретные развертки. Но попробуем заглянуть чуть дальше, например, ответить на вопрос: «Как отыскать эти решения?»

Пусть ребро тетраэдра равно a , сторона правильного шестиугольника равна b , тогда площадь поверхности тетраэдра равна $a^2\sqrt{3}$, а площадь шестиугольника равна $\frac{3}{2}b^2\sqrt{3}$.

Пусть для оклейки понадобится n ($n \in \mathbb{N}$) шестиугольников, тогда если тетраэдр оклеивать шестиугольниками без пропусков и перекрытий, то получим уравнение $n \cdot \frac{3}{2}b^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$, откуда $n = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Заметим, что если $\frac{a}{b} = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, то n станет натуральным числом вида $6k^2$. При каждом натуральном значении k получим одно из решений первой серии. Это значит, что тетраэдр можно оклеить 6, 24, 54, 96, ... $6k^2$ правильными шестиугольниками. Такое решение, содержащее шесть шестиугольников, было первым решением обсуждаемой задачи.

Следующей находкой было решение, которое обнаружили А.М. Домашенко из Новошахтинска и К.Д. Ашурбеков из Махачкалы. Они нашли удивительное решение, содержащее всего лишь два шестиугольника, и заметили, что если $\frac{a}{b} = k\sqrt{3}$, то n станет натуральным числом вида $2k^2$. Именно к этому случаю относится их решение при $k = 1$. Таким образом, была найдена вторая серия решений задачи. При каждом натуральном значении k получим одно из решений этой серии. Это значит, что тетраэдр можно оклеить также таким количеством правильных шестиугольников: 2, 8, 18, 32, ..., $2k^2$.

Интересно отметить, что в каждой серии решений длины сторон шестиугольников образуют гармонический ряд, т.е. если в первом решении длину стороны принять за единицу, то последовательность длин сторон будет такой: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Вполне возможно, что оклеить тетраэдр можно и другим количеством правильных шестиугольников, потому что существует много других значений дроби $\frac{a}{b}$, когда n будет натуральным числом. Например, $\frac{a}{b} = k\sqrt{6}$. Но вопрос здесь остается открытым.

Несмотря на это, находки продолжаются. Существует весьма интересная интерпретация первого решения обсуждаемой задачи. Ее можно считать оригинальной головоломкой-трансформером. Представляет она собой бумажное кольцо, содержащее шесть правильных шестиугольников, последовательно соединенных друг с другом противоположными сторонами длиной b (рис.2). Его нетрудно вырезать и склеить из бумаги, лучше – из ватмана.



Рис. 2



Рис. 3

Оказывается, такое кольцо путем нескольких перегибаний можно трансформировать в правильный тетраэдр. Важно при этом на поверхности кольца правильно определить отрезки перегибаний. Учитывая, что площадь кольца и площадь поверхности тетраэдра равны, легко установить, что ребро тетраэдра равно $3b$. Теперь на поверхности кольца нужно отыскать эти отрезки и перегнуть по ним.

Проделайте это самостоятельно, уверяю, получите при этом ничем не заменимое удовольствие. Если же тетраэдр не сложится, то следуйте инструкции.

На первом шаге сделаем четыре перегиба длиной $1,5b$ поперек кольца, делящих его на четыре части одинаковой длины (рис.3). Каждый перегиб проходит через середины сторон шестиугольника. Взглянув после этого на кольцо сверху, можно заметить контур квадрата.

Следующим шагом нужно сделать еще четыре косых перегиба длиной $3b$, которые

вместе образуют замкнутую ломаную – пространственный четырехугольник со стороной $3b$ (рис.4).

Если теперь взяться пальцами за вершины этого четырехугольника и две противоположные вершины поднимать вверх, а две другие опускать вниз, то вся конструкция, как ни удивительно, превратится в бумажную модель правильного тетраэдра (рис.5).

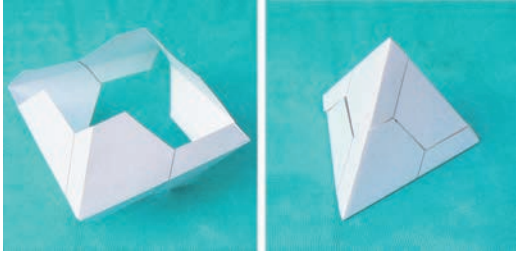


Рис. 4

Рис. 5

Вот такие чудеса встречаются в геометрии.

Можно пойти еще дальше в этом направлении. Оказывается, тетраэдр можно сложить также из двух колец, каждое из которых содержит по 12 шестиугольников; из трех колец по 18 шестиугольников. В этом можно убедиться, наверное, только путем моделирования. Я это проделал и не пожалел, потому что появилась возможность обобщения: тетраэдр можно сложить из k колец, каждое из которых содержит по $6k$ шестиугольников.

На рисунке 6 приведена иллюстрация этого обобщения при $k = 3$. Слева изображены

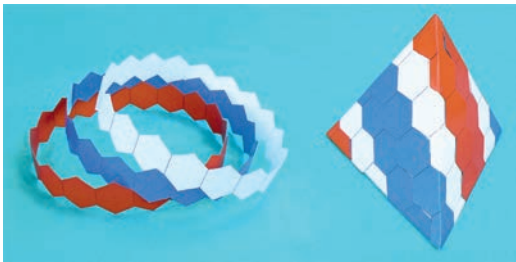


Рис. 6

три бумажных кольца, каждое из которых содержит 18 шестиугольников. Справа – модель правильного тетраэдра, обернутая этими кольцами.

Были попытки объединить все шестиугольники в одно кольцо и сложить тетраэдр из одного длинного кольца, в котором $6k^2$

шестиугольников, но они оказались безуспешными.

Новую находку пришлось ждать недолго. А.М. Домашенко заметил, что «шестилепестковая ромашка», содержащая семь равных правильных шестиугольников, равновелика правильному шестиугольнику. Это легко увидеть на рисунке 7.

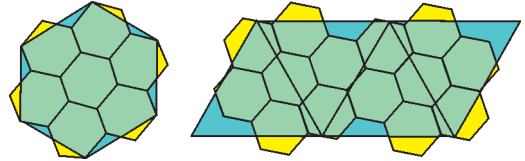


Рис. 7

Это позволило ему трансформировать ранее найденное им решение, содержащее два шестиугольника, заменив каждый шестиугольник «ромашкой» так, что получилась «развертка» тетраэдра, в котором уже 14 шестиугольников. Такую же замену можно проделать с каждой «разверткой» второй серии. Это значит, что найдена третья серия решений, и тетраэдр можно оклеить $14, 56, 126, 224, \dots, 14k^2$ правильными шестиугольниками.

Если такую трансформацию проделать с первой «разверткой» первой серии, то получим решение задачи, содержащее 42 шестиугольника, а вместе с ним новую, уже четвертую, серию решений, в которой $42, 168, 378, 672, \dots, 42k^2$ правильных шестиугольника.

Многие свойства первой и второй серии решений, описанные выше, остаются верными и в третьей, и в четвертой. Например, в каждой новой серии решений длины сторон шестиугольников образуют гармонический ряд. Первые «развертки» тетраэдров в каждой серии можно представить в виде одного замкнутого кольца; вторые «развертки» тетраэдров в каждой серии можно представить в виде объединения двух замкнутых колец; третьи «развертки» – это объединение трех замкнутых колец и так далее.

На рисунке 8 показано замкнутое кольцо из 14 правильных шестиугольников и тетраэдр, сложенный из этого кольца.

На рисунке 9 приведена «развертка» тетраэдра, содержащая 56 правильных шести-

(Продолжение см. на с. 34)

Посмотри на звезды без лучей. Этого можно достигнуть, наблюдая их сквозь малое отверстие, сделанное концом тонкой иглы и помещенное вплотную к глазу.

Леонардо да Винчи

... если свету требуется время, то расстояния в три мили хватило бы, чтобы обнаружить задержку. Если же опыт делать на расстоянии, скажем, в 10 миль, то увидеть слабый свет от далекого фонаря можно, используя телескоп.

Галилео Галилей

... все звезды ... образованы одинаковым процессом. Они, пожалуй, похожи на фабрич-

ные изделия, сделанные одною и тою же машиной.

Джеймс Джинс

Мы находимся в преддверии новой эпохи в астрофизике, когда сведения о далеких галактиках будут получены путем исследования влияния их гравитации на свет, идущий от еще более далеких объектов.

Тулио Редже

... опираясь на основные физические законы, мы часто указываем совершенно точно (а иногда почти точно), что происходит на звездах. Так физика помогает астрономии.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам астрофизика?

«Astron» – по-гречески «звезда», но астрофизика изучает не только звезды. Однако сегодня, в заключительном астрономическом выпуске «Калейдоскопа», мы будем говорить преимущественно о них. Будем надеяться, что в этих выпусках нам удалось показать тесную связь физики со всеми разделами астрономии, в том числе и с теми, что посвящены звездам. Действительно, как можно разобраться с происходящими в звездах процессами, не зная свойств света, электромагнитного и гравитационного взаимодействий, не понимая, как может вести себя вещество, оказавшееся в не встречающихся на Земле экстремальных условиях?

Разумеется, физика внесла огромный вклад в исследование космических объектов самых разных масштабов, дала представление о единстве окружающего нас мира, позволила построить картину Вселенной. Но справедливо и обратное: новые сведения о далеких звездах дополнили багаж наших знаний и о том, что может твориться на Земле, и о нас самих и наших возможностях.

Посудите сами о способствующем этим надеждам прогрессе. Зонд «Вояджер-1», запущенный в 1977 году, добирался «всего лишь» до границ Солнечной системы целых 35 лет. А сегодня уже проектируются «нанозонды»,

способные достичь ближайшей к нам звезды Альфа Центавра, находящейся в тысячи раз дальше, всего за 20 лет!

Научный штурм космоса, за которым неминуемо последует его освоение, продолжается. Вы вполне можете принять в нем участие.

Per aspera ad astra!

Вопросы и задачи

1. Почему днем не видно звезд?
2. Июль, 12 часов дня. Видны ли на небе звезды?
3. Какие объекты Солнечной системы могут (хотя бы иногда) наблюдаться в созвездии Большая Медведица?
4. Почему по мере подъема звезды над горизонтом она выглядит ярче?
5. Можно ли звезду считать точечным источником света?
6. Чем отличаются звезды от планет?
7. В любой телескоп звезды видны как светящиеся точки. В чем же преимущество наблюдения звезд в телескоп перед наблюдением невооруженным глазом?
8. С какой целью приборы для астрономических наблюдений устанавливаются на космические аппараты?
9. Двигаются ли звезды друг относительно друга? Могут ли они сталкиваться?

10. Почему большинство звезд и планет имеют форму, близкую к сферической?

11. У каких космических тел отрицательная теплоемкость?

12. Что представляет собой излучение звезд?

13. Почему холодные звезды имеют красноватый цвет, а горячие звезды кажутся белыми?

14. Чем объяснить, что при годичном движении Земли линии в спектрах звезд, к которым приближается Земля, смещены в фиолетовую сторону?

15. Что служит источником энергии звезд?

16. Можно ли обнаружить черную дыру?

17. Как далеко в прошлое могли «заглянуть» древние греки, любящая звездным небом?

Микроопыт

Попробуйте повторить описанный в первом эпиграфе опыт. Действительно ли вы увидите звезду без лучей? Почему?

Любопытно, что...

... разделение небосвода на созвездия субъективно. Так, 7 звезд привычного нам Ковша Большой Медведицы в Китае издавна распределяли на два созвездия, состоящие из коней и кареты.

... Пифагор полагал, что вокруг Земли вращаются несколько небес – полых сфер, на которых укреплены планеты и звезды. Все эти светила (включая Солнце) он считал отверстиями в темных сферах, сквозь которые виден «небесный огонь», наполняющий Вселенную.

... сведения, добытые Галилеем с помощью телескопа, стали первыми результатами экспериментальной астрофизики. Так, звезд оказалось много больше, чем считалось ранее; туманности, включая Млечный Путь, предстали огромными совокупностями звезд; маленькие звездочки вблизи Юпитера в действительности оказались его спутниками. Первым употребив выражение «скорость света», Галилей предложил использовать телескоп в земном опыте по ее измерению.

... к давним обитателям «звездного зоопарка» – белым и красным карликам – недавно еще добавились карлики «коричневые». Они представляют собой космические тела с массой больше, чем у планеты, но меньше, чем у звезды. Термоядерные реакции в них уча-

ствуют легкого изотопа водорода ^1H не могут начаться, но они все же излучают в инфракрасной области за счет медленного сжатия под действием сил тяготения.

... немногим более полувека назад были открыты пульсары – звезды с самыми сильными из известных в природе магнитными полями. Ими оказались быстро вращающиеся намагниченные нейтронные звезды – своеобразные атомные ядра, крайне переобогащенные нейтронами.

... «увидеть» черную дыру невозможно, поскольку ничто, даже световой луч, не может преодолеть ее колоссальное гравитационное поле. Однако есть способы, с помощью которых ее можно обнаружить (задача 19).

... в ночь с 23 на 24 февраля 1987 года астрономы на Земле наблюдали вспышку сверхновой звезды. Однако сам ее взрыв произошел за 180 тысяч лет до этого, поскольку свету потребовалось столько времени для преодоления разделяющего нас расстояния. А несколько лет назад космические телескопы «Хаббл» и «Спитцер» обнаружили самую удаленную галактику, свет от которой шел к Земле 13,2 миллиардов лет.

... поиски внеземных планет позволили открыть удивительную систему. Экзопланета обращается вокруг двойной звезды. На расстоянии же в 1000 астрономических единиц за ее орбитой вокруг двух внутренних звезд обращаются еще две наружные планеты.

Что читать в «Кванте» об астрофизике

(публикации последних лет)

1. «Где находится горизонт или край Вселенной?» – 2013, №5/6, с.2;
2. «От пяти до Вселенной» – 2016, Приложение №2, с.155;
3. «Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные» – 2017, №1, с.2; 2017, №2, с.9;
4. «Астрономия вернулась в школу» – 2017, №12, с.2; 2018 №1, с.2;
5. «Астрофизика в ЕГЭ по физике» – 2018, №1, с. 42;
6. «Рождение гравитационно-волновой астрономии» – 2018, №3, с.14;
7. «Через тернии к звездам» – 2018, №6, с.34;
8. «ИТЭР – земная звезда» – 2018, №8, с.2;
9. «ИТЭР – сегодня» – 2018, №10, с.2.

Материал подготовил А.Леонович



Рис. 8

угольников. Здесь же показана схема, как этот тетраэдр сложить из двух замкнутых колец – синего и желтого, в каждом из которых по 28 правильных шестиугольников, пронумерованных числами от 1 до 28.

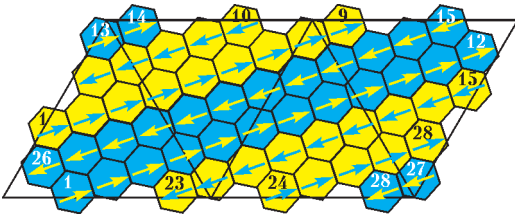


Рис. 9

Стрелками указано направление перехода от одного шестиугольника к соседнему по кольцу.

Но самое интересное, что отношение сторон $\frac{a}{b}$ в этих случаях равно $k\sqrt{21}$ и $3k\sqrt{7}$ соответственно. Кто бы мог предположить, что отношение сторон может быть именно таким! Теперь класс чисел, которые могут выступать в качестве отношения сторон, значительно расширился, а значит, шанс найти новые серии решения увеличился.

Находку А.М. Домашенко можно развивать, если заметить, что «ромашка», содержащая 19 равных правильных шестиугольников, также равновелика правильному шестиугольнику. На рисунке 10 слева это легко увидеть, а на рисунке 10 справа показано, как из двух таких «ромашек» можно сложить развертку тетраэдра.

Если продолжить обобщение в этом направлении, то получим новую серию решений (рис. 11): $2, 14, 38, 74, \dots, 2(3k^2 - 3k + 1)$

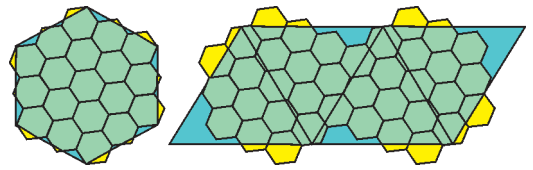


Рис. 10

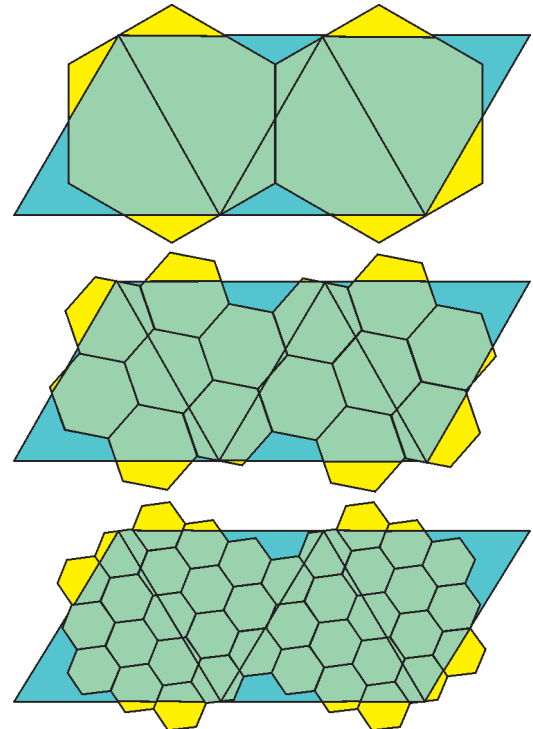


Рис. 11

на основе последовательности чисел $1, 7, 19, 37, \dots, 3k^2 - 3k + 1$ (которые Мартин Гарднер называет гексами).

Вот пока все находки в окрестности этой задачи, которые удалось отыскать на данный момент. Всем, кого заинтересовала эта задача, или тем, кто отыщет новую находку, предлагаю обращаться по адресу avilow@rambler.ru.

Трение против гравитации

М. СТАРШОВ

МНОГО ЛЕТ НАЗАД МНЕ В РУКИ СОВЕРШЕННО СЛУЧАЙНО ПОПАЛА импортная бутылка из-под какого-то крепкого напитка. Естественно, она очень отличалась от неизменной стеклотары советской водки, как я сказал бы сегодня, своим дизайном, но больше всего удивил какой-то стук при встряхивании пустой бутылки. Разобрав пробку, обнаружил в ней симпатичный стеклянный шарик, который жалко было выкидывать. Кто-то же придумал его и сделал так аккуратно!

Я работал тогда в смене одаренных детей в оздоровительном лагере и задумал сделать ударный музыкальный инструмент из бутылки с разным количеством воды – именно потому мне и понадобились пустые бутылки. А в овраг под нашей горой постоянно приходили разные люди, чтобы в лесочке разбросать пустую посуду. Надо сказать, что наши соотечественники имеют твердые жизненные принципы и всегда тщательно закрывают бутылку, когда она им уже не может послужить, и только потом бросают ее в кусты.

Принеся в тихий час эти разнообразные склянки в лагерь и отмыв их, я стал разбирать пробки. Во многих пробках были шарики – в одних пластиковые, а в некоторых стеклянные. Пластиковые выглядели не так красиво, но зато в них были полости и с ними можно было «поиграть» вокруг закона Архимеда – их средняя плотность оказалась близка к плотности холодной воды. А на что годятся шарики стеклянные, долго не приходило в голову. Но вот, наконец, и для них нашлась «работа по физике».

Все оказалось очень просто. В небольшой изящный «пузырек из-под пенициллина», как мы его называли лет шестьдесят назад, я насыпал просеянный сухой речной песок, заполнив пузырек примерно наполовину, вложил стеклянный шарик и плотно закрыл пластиковой пробкой. Встряхнул пузырек, и шарик полностью спрятался под слоем

песка. Пока ничего интересного, но вот потом...

Крепко держа пузырек на весу двумя пальцами левой руки, ладонью правой руки я резко стукнул по пробке. Естественно, ничего нового сначала не заметил. Но после какого-то очередного «подзатыльника» из песка показался возмущенный шарик (рис. 1).



Рис. 1

Это же значит, что более плотный стеклянный шарик всплывает в простом песке, нарушая закон всемирного тяготения!

Не всякий физический опыт или простое наблюдение могут быть немедленно объяснены. Так и в этом пузырьке с шариком может скрываться некоторая тайна и соответствующая физическая проблема.

Мне кажется, во всем виновата инерция. Стеклянный шарик плотнее сухого песка, и инерция способствует сохранению его положения в пространстве при резком толчке. И вот тут в игру вступает великая Сила Трения. Ниже шарика песок чуточку плотнее, чем над ним, где и слой потоньше, и жесткого доньшка пузырька нет. Подозреваю, что из-за этого и сила трения в этом месте чуточку слабее. При каждом толчке состязание «инерция–трение–гравитация» дает крохотное преимущество инерции, песок обтекает шарик, и вот он уже пропустил макушку шарика, а дальше движение становится все легче и легче. Наконец, шарик весь предстает перед нашими восхищенными глазами.

Охотно допускаю, что это не единственное объяснение упорного продвижения гладкого

шарика сквозь зыбучий песок. Однако – еще одно наблюдение.

Поскольку пробка надежно закрывает пузырек, его можно перевернуть, засыпав снова шарик песком. Постучав ладонью по доньшку пузырька, опять вижу вылезавший из песка шарик (рис.2). Значительно



Рис. 2

ускорить демонстрацию можно легко и просто – достаточно держать пузырек на боку, когда его ось симметрии занимает горизонтальное положение (рис.3). Один-два лег-



Рис. 3

ких удара по пробке поднимают шарик. А теперь поворачиваем пузырек на пол-оборота вокруг оси симметрии, и слой песка покрывает шарик.

В заключение можно прибавить, что песок не обязательно должен быть именно песком, его прекрасно заменит кое-что другое, имеющееся на каждой кухне. И шарик не обязательно искать в импортной бутылке, а можно подобрать – буквально! – ему замену в осеннем парке нашей средней полосы.

Думайте сами, ищите сами!

Примечание

Объяснение поведения шарика в песке, данное автором статьи, редакции не кажется очень убедительным. Поэтому читателям предлагается придумать свое физическое объяснение описанному эффекту.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ И АВТОРОВ НАШЕГО ЖУРНАЛА!

Начиная с этого года, некоторым статьям журнала «Квант» присваивается принятый в научной среде цифровой идентификатор публикаций – DOI (Digital Object Identifier). По присвоенному (раз и навсегда) данной статье идентификатору можно получить информацию о ней в базах данных, в частности – в интернете.

Посылая в редакцию нашего журнала статью, просим авторов сообщать о себе, кроме фамилии, имени и отчества, также место работы, занимаемую должность и электронный адрес.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» можно найти на сайте <http://kvant.ras.ru>

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Ф И З И К А

Профильный экзамен

В 2018 году профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и его Севастопольском филиале проводился в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа.

Ниже приводятся примеры заданий профильного экзамена 2018 года.

МЕХАНИКА

1. Дайте определение момента силы относительно оси вращения. Сформулируйте правило моментов.

Задача. Тяжелый однородный тонкий стержень, одним концом шарнирно прикрепленный к неподвижной опоре, другим концом опирается на доску, лежащую на гладком горизонтальном столе, причем угол между доской и стержнем $\alpha = 30^\circ$ (рис.1). Если к

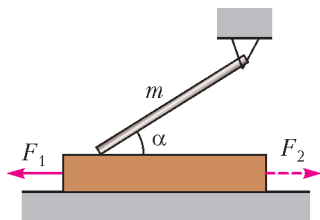


Рис. 1

доске приложить горизонтальную силу, по модулю равную $F_1 = 1$ Н и направленную вдоль доски влево, она будет двигаться в ту же сторону с постоянной скоростью. С какой по модулю силой F_2 можно привести доску

в равномерное движение в противоположном направлении? Коэффициент трения между стержнем и доской $\mu = 0,3$. Трением доски о поверхность стола можно пренебречь.

2. Дайте определение потенциальной энергии механической системы. Чему равны потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли и потенциальная энергия деформированной упругой пружины?

Задача. Трасса для соревнований по бобслею имеет перепад высот от старта до финиша $h = 107$ м. На стартовом горизонтальном участке (полоса разгона) спортсмены разогнали боб до скорости $v_0 = 6$ м/с, с которой пересекли линию старта. В конце спуска по ледяному желобу сразу после финиша спортсмены используют специальное тормозное устройство для гашения скорости боба на горизонтальной поверхности. Тормозной путь боба составил при этом $s = 42$ м. Считая, что коэффициент трения увеличивается на этом участке пропорционально расстоянию x от линии финиша: $\mu(x) = \alpha x$ ($\alpha = 0,1 \text{ м}^{-1}$), определите, какая часть η всей механической энергии боба была потеряна за счет сил трения на участке трассы от конца полосы разгона до финиша. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. Сформулируйте определение внутренней энергии термодинамической системы. Укажите способы изменения внутренней энергии.

Задача. В двух достаточно высоких цилиндрических сосудах, расположенных вертикально, содержится по одному молу идеального одноатомного газа при одной и той же температуре (рис.2). В левом сосуде, открытом сверху, газ сжат тяжелым поршнем и атмосферным давлением. В правом, герметично закрытом, сосуде газ находится

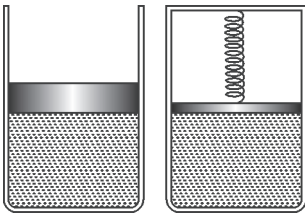


Рис. 2

под невесомым тонким поршнем, который удерживается в равновесии пружиной, помещенной между поршнем и крышкой сосуда. При этом длина недеформированной пружины равна высоте сосуда. В пространстве над поршнем создан вакуум. Оба сосуда нагревают до одной и той же конечной температуры. Найдите отношение n работы, совершенной газом в левом сосуде, к работе, совершенной газом в правом сосуде. Трением при перемещении поршней можно пренебречь.

2. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

Задача. Плотность влажного воздуха при температуре $t_0 = 27^\circ\text{C}$ и давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho = 1,15$ кг/м³. Чему равна относительная влажность ϕ этого воздуха, если плотность насыщенного водяного пара при температуре t_0 равна $\rho_0 = 25,8$ кг/м³? Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К), молярная масса сухого воздуха $M_1 = 29$ г/моль, молярная масса воды $M_2 = 18$ г/моль. Ответ приведите в процентах, округлив до целых.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Дайте определение емкости. Запишите формулу для емкости плоского конденсатора.

Задача. Плоский конденсатор емкостью $C = 400$ пФ присоединен к источнику постоянного напряжения $U = 2$ кВ. Не отключая конденсатор от источника, его пластины медленно раздвинули так, что расстояние между ними увеличилось в $n = 4$ раза. Определите работу $A_{\text{мех}}$, совершенную силами, раздвигавшими пластины конденсатора.

2. Что такое напряженность электрического поля? Чему равна напряженность электростатического поля точечного заряда?

Задача. Разность потенциалов между обкладками конденсатора емкостью $C_1 = 1$ мкФ равна $U_1 = 20$ В. Второй конденсатор емкостью $C_2 = 3$ мкФ заряжен до разности потенциалов между обкладками $U_2 = 10$ В. Разноименно заряженные пластины этих конденсаторов соединили проводниками (рис.3). Определите, во сколь-

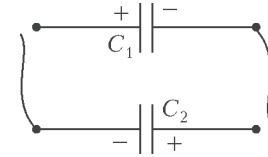


Рис. 3

ко раз k при этом изменилась общая энергия конденсаторов. Ответ приведите в виде простой дроби.

ОПТИКА

1. Сформулируйте закон отражения света. Приведите пример построения изображения предмета в плоском зеркале.

Задача. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 60^\circ$. Вдоль биссектрисы этого угла равномерно движется светящаяся точка со скоростью $v = 2$ см/с. Через какой промежуток времени расстояние между первыми изображениями точки в зеркалах изменится на величину $\Delta x = 12$ см?

2. Сформулируйте закон преломления света. Что такое предельный угол полного отражения?

Задача. На горизонтальном дне широкого сосуда лежит достаточно большое плоское зеркало. В сосуд наливают жидкость с показателем преломления $n = 1,5$ и кладут на верхнюю поверхность жидкости непрозрачный экран, закрывающий ее поверхность полностью. В центре экрана находится маленькое круглое отверстие, освещаемое рассеянным светом. Какова площадь S освещенной области на нижней стороне экрана, если толщина слоя жидкости $h = 10$ см? Ответ приведите в квадратных сантиметрах, округлив до целых.

Публикацию подготовил С.Чесноков

Физико-математическая олимпиада «Физтех»

История физико-математической олимпиады школьников «Физтех» началась более 40 лет назад, в далеком 1975 году. Одним из ее организаторов был академик Б.В.Войцеховский. Основные и наиболее важные задачи олимпиады – это повышение интереса к углубленному изучению математики и физики у молодежи, выявление среди юных участников талантливых и творчески мыслящих школьников.

Олимпиада «Физтех» проходит в два этапа, отдельно по математике и физике. Для успешного прохождения на заключительный этап необходимо стать победителем или призером в одном из отборочных этапов по каждому предмету. Также к заключительному этапу допускаются победители и призеры олимпиады «Физтех» прошлого года по соответствующему предмету.

Территория охвата проведения олимпиады и количество участников ежегодно растут. Если в 2009 году мероприятие проводилось в двух странах в 25 точках проведения, а участников было около 2 тысяч, то в 2018 году стран-участниц насчитывалось уже 8, точек проведения – 79, а школьников, принявших участие в заключительном этапе олимпиады «Физтех», – более 6,5 тысяч по каждому предмету. Общее же число зарегистрированных участников отборочных этапов впечатляет – более 33 тысяч в 2016/17 учебном году и более 40 тысяч в 2017/18. С полной уверенностью олимпиаду «Физтех» можно назвать международной – ведь в прошлом учебном году олимпиада была проведена не только на территории Российской Федерации, но и в Белоруссии, Армении, Казахстане, Киргизии, Молдове, Таджикистане и Узбекистане.

Информационное сопровождение олимпиады осуществляется сайтом олимпиады – olymp.mipt.ru, официальным сайтом МФТИ – mipt.ru и сайтом поддержки абитуриентов вуза – abit.net.

Физико-математическая олимпиада «Физтех» входит в перечень олимпиад школьников, утвержденный Министерством просвещения Российской Федерации.

Ниже приводятся материалы по математике и физике, предлагавшиеся в 2018 году на заключительном этапе олимпиады «Физтех».

МАТЕМАТИКА

11 класс

Вариант 1

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трех данных чисел $\log_{x^2}(x^2 - 3x + 2)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-1}$ равно сумме двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $3(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $3(f(x))^2 + 2g(x)$ равно $-\frac{19}{6}$.

3. На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 6$ отмечено по 200 точек с абсциссами 1, 2, 3, ..., 200. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 3$ и $2\sin(2x + 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $KC = 1$, $AL = 4$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника CMN .

6. Назовем *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от семи последовательных натуральных чисел до некоторого числа a равна 609, а сумма расстояний от этих же семи чисел до некоторого числа b равна 721. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 192$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается ребер BB_1 , B_1C_1 , C_1C , CB , CD и при этом касается ребра CD в такой точке K , что $CK = 9$, $KD = 1$.

а) Найдите длину ребра A_1A .

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1 . Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

Вариант 2

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трех данных чисел $\log_x \left(x - \frac{3}{2} \right)$, $\log_{x-\frac{3}{2}} (x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 7g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведенных квадратных трехчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с целыми неотрицательными показателями и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{47} .

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y + \cos x = \sin 3x$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x$. Какое наименьшее значение может принимать сумма $\sin y + \sin x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с радиусом 5 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Окружность Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 6. Найдите длины отрезков AD , BK и периметр треугольника EVM .

6. Назовем *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма

расстояний от шестнадцати последовательных натуральных чисел до некоторого числа равна 636, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до числа a^2 равна 591. Найдите все возможные значения a .

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырех граней параллелепипеда, причем одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B . Известно, что $BM = 1$, $CM = 24$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объем параллелепипеда.

Избранные задачи для 10 класса

1. Каких целых чисел от 1 до $8 \cdot 10^{20}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только четные цифры или содержащих в своей записи только нечетные цифры?

2. Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a .

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD , и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M . При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N . При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD , если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

4. Даны 2117 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2117 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

5. Уравнение $x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два

различных корней x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^3 + \frac{14}{x_2} = x_2^3 + \frac{14}{x_1}.$$

Найдите все возможные значения a .

6. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P . Известно, что расстояния от точки P до сторон AB, BC, CD, DA равны 4,

$\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$ и $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

а) Найдите отношение $AP : PC$.

б) Найдите длину диагонали BD , если дополнительно известно, что $AC = 10$.

ФИЗИКА

9 класс

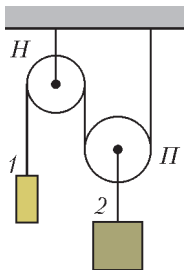


Рис. 1

1. Два подвешенных на нитях груза 1 и 2 различной массы могут двигаться в системе, состоящей из неподвижного блока H и подвижного блока P (рис.1).

1) Найдите отношение масс грузов 1 и 2, если подвешенные грузы остаются неподвижными.

2) Найдите отношение масс грузов 1 и 2, если груз 1 движется с ускорением $a_1 = g/5$, направленным вверх.

Массами нитей, блоков, а также трением в осях блоков можно пренебречь.

2. Девочка бросает мячик вертикально вверх. Когда мячик достигает максимальной высоты своего полета, девочка бросает вверх второй мячик с той же скоростью и с того же места, что и первый. В результате мячики сталкиваются на высоте $H = 1,8$ м от места броска. Какой максимальной высоты H_0 , считая от места броска, достигал в своем полете первый мячик? Сопротивление воздуха не учитывать.

3. На гладкой горизонтальной поверхности расположена доска массой $3m$, на которой лежит брусок массой m (рис.2). Коэффициент трения между бруском и доской μ .

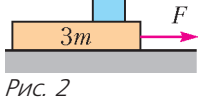


Рис. 2

1) Какую минимальную горизонтальную силу $F_{\text{мин}}$ надо приложить к

доске, чтобы относительно нее начал двигаться брусок?

2) За какое время брусок переместится относительно доски на расстояние L , если к доске приложить силу $F > F_{\text{мин}}$?

4. Брусок, представляющий собой прямоугольный параллелепипед высотой H с квадратным поперечным сечением, сторона которого равна a , висит на пружине и опущен в цилиндрический сосуд с водой (рис.3). Стенки сосуда вертикальны. Первоначально брусок погружен в воду на $3/4$ своего объема, а пружина не деформирована. Воду доливают в сосуд так, что уровень воды совпадает с верхней гранью бруска. Жесткость пружины k , плотность воды ρ .

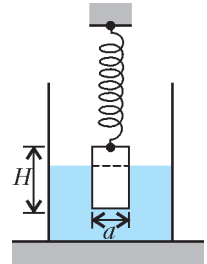


Рис. 3

1) Найдите массу бруска.

2) Найдите изменение высоты уровня воды в сосуде после долива воды.

5. Проводящий проволочный каркас (рис.4), составлен из 16 одинаковых отрезков жесткого провода.

К клеммам A и B подано напряжение $U = 9$ В. При этом через подводящие провода течет ток $I = 1/2$ А.

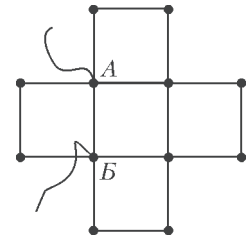


Рис. 4

1) Найдите сопротивление R между клеммами A и B .

2) Найдите сопротивление r одного отрезка провода.

10 класс

1. Систему из бруска массой $m_1 = m$ и доски массой $m_2 = 3m$, находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая к доске горизонтальную силу F (рис.5). Коэффициент трения между столом и доской и между горизонтальной поверхностью доски и бруском равен μ . Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.

1) Найдите ускорение a_1 доски, если бы не было трения.

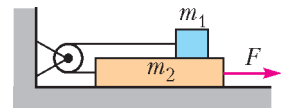


Рис. 5

2) Найдите ускорение a_2 доски, если есть трение и параметры F , m , μ подобраны так, что есть движение.

2. Пустую стеклянную бутылку вместимостью $V = 0,8$ л опускают в цилиндрический сосуд с водой с вертикальными стенками. Бутылка стала плавать, а уровень воды в сосуде поднялся на $H_1 = 2$ см. Затем в бутылку медленно наливают воду. Когда масса налитой воды достигает некоторой величины, бутылка начинает тонуть. Уровень воды в сосуде за время наливания поднялся еще на H_2 . Плотность стекла $\rho_0 = 2,5$ г/см³, плотность воды $\rho = 1$ г/см³. Площадь внутреннего сечения сосуда $S = 250$ см². Бутылка плавает в вертикальном положении.

1) Найдите массу пустой бутылки.

2) Найдите массу воды, налитой в бутылку.

3) Найдите H_2 .

3. Ракета стартует вертикально. К моменту $t_1 = 10$ с полета вес выводимого на орбиту прибора увеличился в $k_1 = 1,2$ раза (относительно веса перед стартом), к моменту $t_2 = 30$ с полета вес прибора был уже в $k_2 = 1,4$ раза больше, чем перед стартом. Считать массовый расход топлива постоянным. Сопротивлением воздуха и изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь. Принять $g = 10$ м/с².

1) Найдите ускорение ракеты в момент времени t_2 .

2) Определите скорость u вытекания продуктов сгорания относительно сопла, считая ее постоянной.

4. В цилиндре под поршнем находятся в равновесии воздух, водяной пар и вода. Отношение масс жидкости и пара $\alpha = 3/4$. В медленном изотермическом процессе объем влажного воздуха увеличивается в $k = 7$ раз.

1) Найдите относительную влажность воздуха ϕ_1 в цилиндре в начале процесса.

2) Найдите относительную влажность воздуха ϕ_2 в цилиндре в конечном состоянии.

5. Одноатомный идеальный газ нагревается в изохорическом процессе 1–2, затем расширяется в адиабатическом процессе 2–3 и сжимается в изоба-

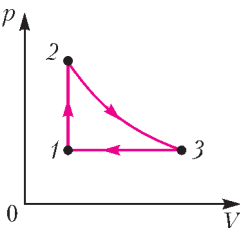


Рис. 6

рическом процессе 3–1 (рис.6). Отношение работы газа A_{23} в процессе 2–3 к отведенному от газа количеству теплоты Q_{31} ($Q_{31} > 0$) в процессе 3–1 равно $\frac{A_{23}}{Q_{31}} = \frac{72}{35}$. В процессе сжатия объем газа уменьшается в 8 раз.

1) Найдите отношение температур T_2/T_3 в состояниях 2 и 3.

2) Найдите отношение количества теплоты Q_{12} , подведенного к газу в процессе 1–2, к Q_{31} .

11 класс

1. Систему из трех брусков, находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая горизонтальную силу F (рис.7). Коэффициент трения между столом

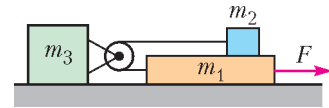


Рис. 7

и брусками и между соприкасающимися брусками массами m_1 и m_2 равен μ . Массы брусков $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$. Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.

1) Найдите силу натяжения нити, если бруски массами m_1 и m_2 скрепить, а параметры F , m , μ подобрать такими, чтобы бруски двигались по столу как одно целое.

2) Найдите силу натяжения нити, если параметры F , m , μ подобраны так, что нескрепленные бруски массами m_1 и m_2 движутся друг по другу, а бруски массами m_1 и m_3 – по столу.

2. Газообразный

гелий расширяется в процессе 1–2, в котором давление прямо пропорционально объему (рис.8). Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоемкостью. Работа, совершенная газом в процессе 1–2, в 6 раз меньше работы, совершенной газом в процессе 2–3. Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

1) Найдите отношение количества теплоты, полученного газом в процессе 1–2, к работе газа в процессе 1–2.

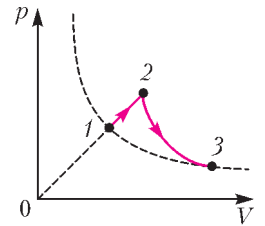


Рис. 8

2) Найдите молярную теплоемкость газа в процессе 2–3.

3. Две бусинки, каждая с положительным зарядом q и массой m , могут скользить без трения по жесткому, непроводящему стержню. Систему помещают в однородное магнитное поле с индукцией B и приводят во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O , перпендикулярной стержню и параллельной

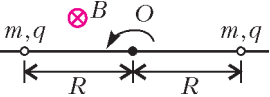


Рис. 9

направлению магнитного поля (рис.9). Оказалось, что бусинки находятся в равновесии (относительно стержня) на одном и том же расстоянии R от оси O при двух значениях угловой скорости ω_1 и ω_2 .

1) Найдите заряд q , считая известными m , B , ω_1 и ω_2 .

2) Найдите R , считая известными m , B , ω_1 и ω_2 .

Силой тяжести, силами сопротивления, а также магнитным полем, индуцированным бусинками, пренебречь.

4. В цепи, схема которой показана на рисунке 10, все элементы идеальные, их параметры указаны на схеме, причем $R = 5r$.

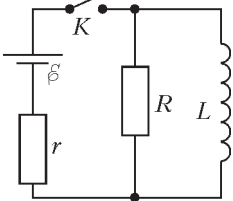


Рис. 10

Ключ K разомкнут, режим в цепи установился. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. К моменту размыкания скорость роста

силы тока в катушке индуктивности уменьшается в 1,5 раза.

1) Найдите скорость роста силы тока в катушке сразу после замыкания ключа.

2) Найдите силу тока I_L через катушку непосредственно перед размыканием ключа.

3) Какое количество теплоты Q выделится в цепи после размыкания ключа?

5. Линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см движется со скоростью $v = 1$ мм/с (рис.11). Стержень AB длиной $h = 1$ см,

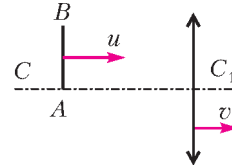


Рис. 11

расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы CC_1 , движется со скоростью $u = 3v/2$. Все движения поступательные вдоль главной оптической оси линзы. В некоторый момент стержень находится на расстоянии $d = 3F/2$ от линзы.

1) На каком расстоянии от линзы будет находиться изображение стержня в этот момент?

2) Какой длины будет изображение стержня в этот момент?

3) С какой скоростью будет двигаться изображение точки A стержня в этот момент?

Публикацию по математике подготовили С.Городецкий, Н.Агаханов, И.Богданов, И.Глухов, В.Дубинская, О.Подлипский, А.Полозов, Д.Терёшин; по физике – В.Чивилёв, В.Усков, В.Бабинцев, Л.Колдунов, В.Плис, А.Полозов, А.Шеронов, Ю.Юрьев

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ВАРИАНТ 1

1. Поплавок плавает в цилиндрическом сосуде, заполненном некоторой жидкостью. Снизу к поплавку тонкой невесомой ниткой

привязано грузило массой m , сделанное из материала плотностью ρ . Когда нить оборвалась, а грузило опустилось на дно, уровень воды в сосуде изменился на Δh . Определите плотность жидкости. Площадь сосуда равна S .

2. Сплошной проводник имеет форму усеченного конуса, основания которого покры-

ты тонким слоем идеального проводника (рис.1). С помощью омметра измеряют сопротивление между верхним и нижним осно-

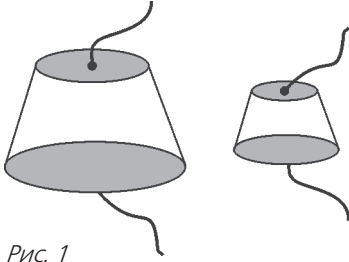


Рис. 1

ваниями конуса. Определите, во сколько раз изменились бы показания омметра, если вместо данного тела взять его уменьшенную копию, масса которой в 8 раз меньше.

3. На тонкое кольцо массой M и радиусом R , находящееся в невесомости, надеты две одинаковые маленькие бусинки массой m и зарядом q каждая (рис.2). Бусинки связаны тонкой нитью длиной R , массой которой можно пренебречь.

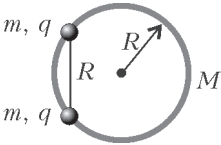


Рис. 2

Нить и кольцо непроводящие и не заряжены. Вся система находится в покое. Нить перерезают. Найдите скорость кольца в момент, когда расстояние между бусинками увеличится вдвое.

4. На краю горизонтального стола лежит длинная доска массой m так, что ее конец выступает относительно края стола на l (рис.3). Нить, закрепленная в точке A , пере-

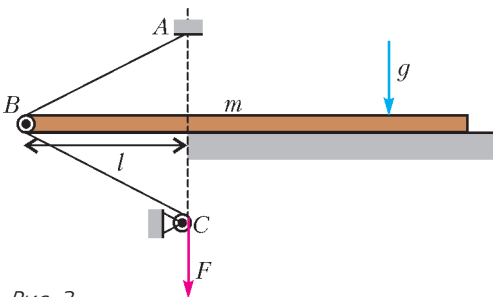


Рис. 3

кинута через два маленьких свободно вращающихся блока, один из которых прикреплен к концу доски в точке B , а второй закреплен в точке C . В начальный момент точки A , B и C образуют равносторонний треугольник, высота которого проходит вдоль оси доски.

Доска покоится. Ускорение свободного падения равно g , коэффициент трения доски о стол равен μ . Свободный конец нерастяжимой нити начинают тянуть с постоянной силой $F = \mu mg$. Определите максимальную скорость, которую приобретет доска в процессе вытягивания нити, считая, что доска двигалась поступательно вдоль своей оси без вращения. Трением нити о блоки пренебречь.

5. Оцените установившуюся скорость, которую приобрела бы Мэри Поппинс, если бы она прыгнула с очень большой высоты с раскрытым зонтиком. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

Внимание! Каждая задача считается решенной, если помимо правильного ответа приведены необходимые объяснения.

ОТКРЫТАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «БУДУЩЕЕ СИБИРИ»

Первый (отборочный) этап

8 класс

1. Вася отправился в лес по грибы. Грибов попадалось мало, и путь становился долгим. Для того чтобы не заблудиться при возвращении, он решил через каждый час оставлять метки. Через 15 минут после того, как Вася оставил вторую метку, он нашел первую и понял, что движется по кругу. Какова протяженность этого круга, если средняя скорость передвижения Васи по лесу была 4 км/ч?

2. Пункты A и B расположены на одном берегу реки, причем B – ниже по течению. На путь из A в B вдоль берега катер затрачивает время t_1 . Обратный путь, из B в A , занимает время t_2 . Определите скорость течения реки, если известно, что минимальное время, за которое катер может пересечь реку от берега до берега, равно t_3 , а ширина реки равна d .

3. К концам равноплечих рычажных весов подвешены два одинаковых по размеру шарика массами m_1 и m_2 (рис.4). Рычаг невесомый и имеет длину L . Шарик массой m_1 погружен в стакан с жидкостью. При этом весы находятся в равновесии. Затем

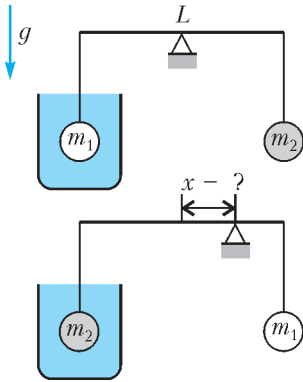


Рис. 4

шарики поменяли местами. На какое расстояние x необходимо передвинуть точку опоры рычажных весов, чтобы они вновь оказались в равновесии?

4. В термос с водой опущен термометр, который показывает температуру T_0 . В воду бросили кусочек льда массой Δm , имеющий температуру 0°C . Когда лед растаял, термометр показал температуру T_1 . Затем в воду бросили еще один такой же кусочек льда. После того, как лед растаял, термометр показал температуру T_2 . Определите массу m воды, изначально находившейся в термосе. Теплоемкостями термоса и термометра пренебречь.

9 класс

1. Кусок однородной проволоки длиной 10 см разрезали на два куска. Найдите длины этих кусков, если при параллельном соединении их общее сопротивление составило 0,24 от сопротивления исходного куска.

2. В термос с водой опущен термометр, который показывает температуру T_0 . В воду бросили кусочек льда. Когда лед растаял, термометр показал температуру T_1 . Затем в воду бросили еще один такой же кусочек льда, который находился при той же начальной температуре, что и первый. После того, как лед растаял, термометр показал температуру T_2 . Определите массу Δm кусочка льда, если известно, что изначально в термосе находилась вода массой m . Теплоемкостями термоса и термометра пренебречь.

3. Катапульта бросает теннисный шарик с начальной скоростью v под углом α к горизонту (рис.5). Шарик ударяется о крышу

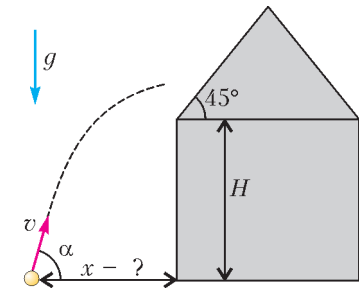


Рис. 5

соседнего дома. На каком расстоянии x от дома нужно расположить катапульта, чтобы после упругого удара об эту крышу он поднялся на наибольшую возможную высоту над землей? Высота дома H , наклон ската крыши 45° . Влиянием воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .

4. Над столом на высоте H с угловой скоростью ω вращается горизонтальный диск радиусом R (рис.6). На расстоянии r от оси

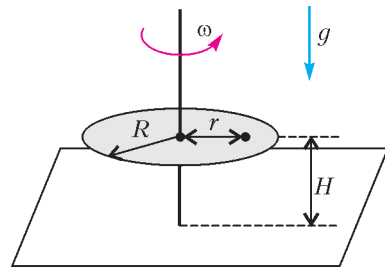


Рис. 6

к диску приклеено небольшое тело. Внезапно тело отклеивается, и сила сцепления между диском и телом исчезает. Через какое время t тело достигнет стола? Трением и влиянием воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .

10 класс

1. Невесомый Г-образный жесткий стержень ABC (угол B – прямой) может свободно вращаться вокруг точки O (рис.7). Длины отрезков AO , OB и BC равны 1 см, 4 см и 3 см соответственно. В точке A к стержню

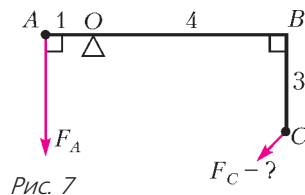


Рис. 7

перпендикулярно отрезку AB приложена сила $F_A = 60$ Н. Найдите минимальное значение силы F_C , которую, выбрав оптимальное направление, нужно приложить к стержню в точке C , чтобы стержень находился в равновесии.

2. Какое минимальное количество n шариков нужно проколоть в связке из $N = 25$ одинаковых шариков, надутых гелием, чтобы при нормальных условиях связка перестала подниматься вверх? Объем одного надутого шарика $V = 10$ л, масса проколотого шарика $m = 6$ г, молярная масса воздуха $M_B = 29$ г/моль, гелия $M_r = 4$ г/моль, объем одного моля при нормальных условиях $V_0 = 22,4$ л, объемом проколотого шарика пренебречь.

3. Паучок поднимается по паутинке, двигаясь с ускорением $a = 0,2g$ относительно стола (рис.8). Паутинка прикреплена к ка-

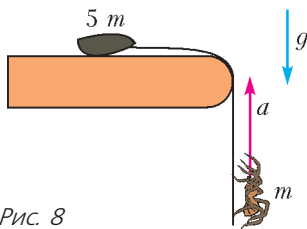


Рис. 8

мешку, находящемуся на столе. Масса камешка в 5 раз больше массы паучка, в начальный момент они имели нулевые скорости и находились на одном и том же расстоянии до края стола. Паучок или камешек раньше достигнет края стола? Трением и размерами камешка и паучка пренебречь.

4. С помощью резака на шарнире разрезают плоский толстый пластмассовый лист, лежащий на столе (рис.9). Коэффициент трения между резаком и листом μ_1 , а между

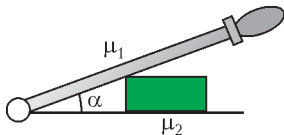


Рис. 9

листом и столом μ_2 . Резак медленно опускают, уменьшая угол α его наклона к столу. Вначале лист не разрезается, а скользит по поверхности стола. При каком угле α резак начнет разрезать лист? Весом листа пренебречь.

11 класс

1. Кусок однородной проволоки длиной 10 см разрезали на два куска. Найдите длины этих кусков, если при параллельном соединении их общее сопротивление составило 0,21 от сопротивления исходного куска.

2. Конструкция в форме буквы У состоит из трех одинаковых брусков, сделанных из однородного материала, склеенных в одной точке, как показано на рисунке 10. Конст-

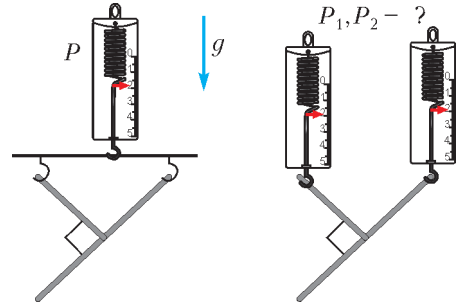


Рис. 10

рукцию взвесили при помощи пружинных весов, которые показали значение P . Какими будут показания двух пружинных весов, присоединенных к двум разным концам конструкции, при условии прежней ориентации буквы У?

3. В длинную тонкую цилиндрическую трубку, закрытую с одного конца, вставлен легкий герметичный поршень, на котором находится электрический заряд. К закрытому концу трубки прикрепили электрический заряд того же знака. Давление воздуха под поршнем в 2 раза меньше, чем внешнее атмосферное давление, при этом система находится в равновесии. Во сколько раз необходимо увеличить заряд поршня, чтобы объем воздуха под поршнем после установления равновесия увеличился в два раза? Температуру считать постоянной. Стенки трубки непроводящие. Трением пренебречь.

4. На наклонной плоскости, которая расположена под углом α к горизонту, покоятся два одинаковых бруска массой m каждый, связанных между собой пружинкой жесткостью k . В начальный момент пружинка не деформирована. Коэффициент трения между брусками и наклонной плоскостью $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Верхнему бруску ударом придали скорость v вверх вдоль наклонной плоскости. Найдите максимальное сжатие пружинки,

если известно, что в процессе всего движения нижний брусок вверх не перемещался. Ускорение свободного падения равно g .

Второй (заключительный) этап

8 класс

1. Из кубического сосуда, доверху заполненного льдом, выпилили и вынули кубический кусочек льда со стороной, в 2 раза меньшей стороны сосуда. В образовавшуюся полость начали медленно наливать воду с начальной температурой $T_в = 15\text{ }^\circ\text{C}$, которая замерзала по мере налива. В результате сосуд снова полностью заполнился льдом, установившаяся температура которого оказалась равной $T_л = -20\text{ }^\circ\text{C}$. Найдите начальную температуру льда. Удельная теплоемкость льда $c_л = 2100\text{ Дж/(кг}\cdot\text{град)}$, воды $c_в = 4200\text{ Дж/(кг}\cdot\text{град)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 336000\text{ Дж/кг}$. Сосуд теплоизолирован, теплоемкостью его стенок, а также теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

2. В сосуде с жидкостью плавает тело в форме куба так, что $1/6$ часть его объема находится над поверхностью жидкости. Сосуд с жидкостью и телом нагрели до некоторой температуры. За счет теплового расширения (не одинакового для тела и жидкости) объем тела, сохранившего форму куба, увеличился в x раз, а общий объем жидкости увеличился в kx раз. Найдите k , если известно, что после нагрева тело плавает в жидкости, погрузившись полностью.

3. На прямолинейной дороге на расстоянии $l = 3\text{ км}$ друг от друга расположены два тоннеля, длина которых превышает l (рис.11). Скорости машин на открытых участках $v = 60\text{ км/ч}$, а в тоннеле

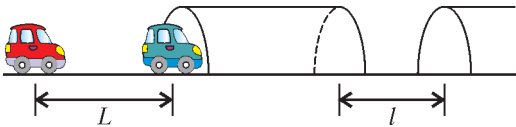


Рис. 11

$u = 40\text{ км/ч}$. В начальный момент времени одна из машин начинает въезжать в первый тоннель, а вторая движется на $L = 6\text{ км}$ позади нее. Каким будет расстояние между машинами в момент, когда сзади идущая машина начнет выезжать из первого тоннеля?

4. Однородная проволока массой M согнута под прямым углом в некоторой точке, разбивающей ее на два неравных отрезка с длинами a и b ($a > b$). Проволоку подвесили за точку сгиба (рис.12). Найдите массу m точечного тела, которое нужно прикрепить к концу отрезка длиной b , чтобы в равновесии отрезки отклонялись от вертикали на одинаковые углы.

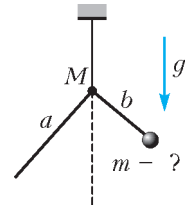


Рис. 12

9 класс

1. В сосуде с жидкостью плавает тело в форме куба так, что $1/5$ часть его объема находится над поверхностью жидкости. Сосуд с жидкостью и телом нагрели до некоторой температуры. За счет теплового расширения (не одинакового для тела и жидкости) объем тела, сохранившего форму куба, увеличился в x раз, а общий объем жидкости увеличился в kx раз. Найдите k , если известно, что после нагрева тело плавает в жидкости, погрузившись полностью.

2. Школьнику Пете досталась схема, содержащая четыре резистора, источник напряжения $U = 10\text{ В}$ и миллиамперметр (рис.13). Три резистора имеют одинаковое

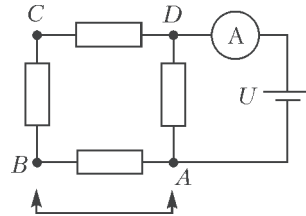


Рис. 13

сопротивление. Для того чтобы определить сопротивления резисторов, Петя поочередно подсоединял закоротку (проволоку с нулевым сопротивлением) между точками AB , BC и CD и записывал показания прибора. Результаты измерений, соответственно, таковы: 12 мА , 12 мА и 15 мА . Миллиамперметр и источник напряжения идеальные. Найдите величины всех сопротивлений в схеме ($R_{AB}, R_{BC}, R_{CD}, R_{DA}$).

3. На закрепленную спицу длиной L надеда маленькая заряженная бусинка массой m (рис.14). После того, как включили источник горизонтального электрического поля,

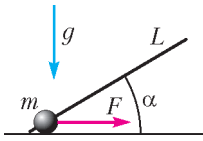


Рис. 14

на бусинку начала действовать горизонтальная сила F , после чего она пришла в движение и слетела со спицы. На какую максимальную высоту относительно конца спицы поднимется бусинка? Спица расположена под углом α к горизонту. Трения нет. Ускорение свободного падения равно g .

4. Мерный угольник, состоящий из двух одинаковых стержней массой m , соединенных шарниром, стоит на горизонтальной поверхности (рис.15). Шарнир находится на высоте h относительно поверхности, а свободные концы стержней упираются в поверхность на расстоянии d друг от друга. С какой вертикальной силой

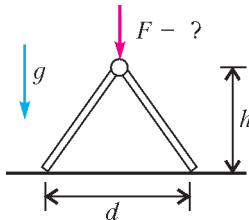


Рис. 15

нужно надавить на шарнир, чтобы «ноги» угольника разъехались? Коэффициент трения между стержнями и поверхностью μ , трение в шарнире отсутствует, массой шарнира пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .

5. Длинная высокая коробочка ширины L повернута на бок и находится рядом с работающим душем (рис.16). Верхний бок коробочки расположен чуть ниже уровня лейки

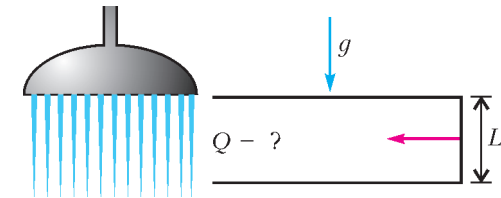


Рис. 16

душа. Коробочку начинают быстро двигать по горизонтали влево так, что она, захватывая воду, на время полностью перекрывает водяную струю лейки. В результате в коробочке оказывается объем воды V . Найдите расход воды Q (объем воды, протекающий через сечение в единицу времени) через лейку душа, если суммарная площадь дырок в лейке S . Вода, попавшая в коробочку, назад не выплескивается. Ускорение свободного падения равно g . Влиянием воздуха пренебречь.

1. Школьник Петя собрал схему, состоящую из четырех резисторов, как показано на рисунке 17. Три резистора с одинаковым сопротивлением r , а сопротивление четвертого резистора R отличается. Школьник при помощи омметра последовательно измерил сопротивление между точками AB , BC и CD . Получившиеся значения оказались такими: $R_{AB} = 0,8$ кОм, $R_{BC} = 0,8$ кОм, $R_{CD} = 1,2$ кОм соответственно. Найдите значения r и R .

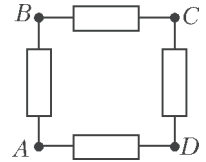


Рис. 17

2. Длинная спица закреплена серединой на горизонтальной оси и может вращаться в вертикальной плоскости. Вдоль нее могут скользить две одинаковые бусинки массой m , находящиеся на спице по разные стороны от точки крепления (рис.18). Бу-

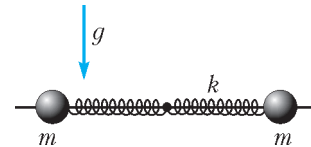


Рис. 18

синки легкими пружинами жесткостью k соединены с осью. В начальный момент спица расположена горизонтально и вся система покоится. Однако это положение неустойчивое. Из-за случайного слабого возмущения система переходит в новое устойчивое положение равновесия. Найдите количество теплоты Q , которое выделится в процессе такого перехода. Ускорение свободного падения равно g . Трением и влиянием воздуха пренебречь.

3. Клапан в виде массивного конуса (рис.19) открывается, когда давление на верхней границе закрытого резервуара с водой опускается до значения p_1 . Конус перевернули для использования в качестве клапана, который открывается при повышении давления. При каком давлении p_2 вода

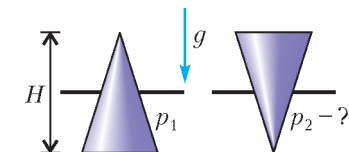


Рис. 19

начнет вытекать из резервуара? Высота конуса H , плотность воды ρ , ускорение свободного падения g . Диаметр основания конуса в 2 раза больше диаметра отверстия.

Трением между конусом и стенками резервуара пренебречь.

4. Вертикально стоящий сосуд перекрыт девятью одинаковыми поршнями (рис.20). В промежутках под каждым из них находится одинаковое количество воздуха. Высота промежутка под верхним поршнем $h = 11$ см, а давление воздуха под ним в 2 раза больше атмосферного. На сколько опустится верхний поршень, если его массу удвоить? Температуру считать постоянной.

5. На шероховатой наклонной плоскости с углом при основании α лежит шайба, которая соединена с пружиной, а другой конец пружинки прикреплен к плоскости (рис.21). Коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu < \operatorname{tg} \alpha$. В начальный момент ось пружинки направлена вверх по склону вдоль скатывающей силы. Шайбу начинают после-

довательно подталкивать маленькими толчками – каждый раз в направлении, перпендикулярном оси пружинки. При каком отклонении оси пружинки от начального положения (угол β) шайба «сорвется» и сама начнет скользить вниз?

11 класс

1. Теплообменник состоит из длинной теплоизолированной трубки, в которую вставлена тонкостенная трубка той же длины, но меньшего диаметра (рис.22). Во внутреннюю трубку затекает горячая жидкость с температурой $T_1 = 90^\circ\text{C}$ с постоянным расходом $J_r = 2$ кг/с (расход – масса жидкости, которая проходит через трубку в единицу времени). Теплоемкость этой жидкости не зависит от температуры и равняется $c_r = 1600$ Дж/(кг·град). Для того

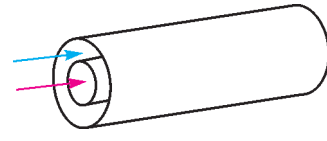


Рис. 22

чтобы эта горячая жидкость охладилась, во внешнюю трубку запустили другую, холодную жидкость с температурой $T_x = 10^\circ\text{C}$. Теплоемкость холодной жидкости также не зависит от температуры и равняется $c_x = 3200$ Дж/(кг·град). Оказалось, что при расходе холодной жидкости $J_x = 4$ кг/с горячая жидкость охлаждается на выходе из трубки до необходимой температуры жидкости $T_1 = 50^\circ\text{C}$. Какова температура T_2 холодной жидкости на выходе?

2. Маленький грузик с массой m и зарядом q покоится на легкой нити длиной l (рис.23). В точке подвеса закреплен такой же заряд q . Какую минимальную скорость v_0 необходимо придать грузику, чтобы он сделал полный оборот по окружности вокруг точки подвеса? Ускорение свободного падения равно g .

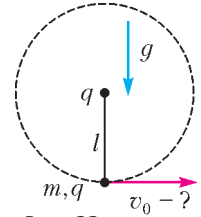


Рис. 23

3. Спица в форме полуокружности закреплена вертикально, а ее концы A и B лежат на диаметре, ориентированном горизонтально (рис.24). На спицу нанизана маленькая невесомая бусинка, через которую пропущена нить, закрепленная

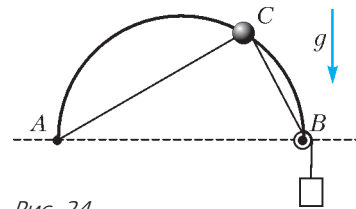


Рис. 24

в точке A и перекинута через невесомый блок в точке B . К концу нити прикреплен груз. Коэффициент трения между бусинкой и спицей μ (также в блоке трения нет). Найдите минимальный угол $\alpha = \angle CAB$ (точка C – положение бусинки), при котором бусинка находится в равновесии.

4. Перпендикулярно наклонной плоскости, с углом α к горизонту, установили

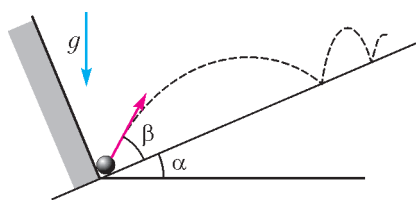


Рис. 25

высокую стенку (рис.25). Из угла, образованного стенкой и наклонной плоскостью, бросили маленький шарик, сообщив ему скорость под углом β к наклонной плоскости ($\alpha + \beta < \pi/2$). Сколько ударов сделает шарик о наклонную плоскость, прежде чем он ударится о стенку? Удары шарика абсолютно упругие. (Целую часть числа обозначать [].)

5. Оцените среднее расстояние между молекулой углекислого газа и соседней молекулой кислорода в атмосфере Земли при нормальных условиях. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

6. Задача-демонстрация (демонстрируется видеоролик). Два неодинаковых шарика – большой и маленький – подвешены на нитях вплотную друг к другу. В начале эксперимента шарики неподвижны, нити вертикальны, а центры шариков находятся на одинаковой высоте. Один из шариков отклонили и отпустили, после чего наблюдаются столкновения шариков. Оказалось, что если отклонить *маленький* шарик и отпустить его, то после каждого нечетного соударения *шарики движутся в разные стороны*, а после каждого четного – *большой шарик оказывается неподвижным*. Если же отклонить большой шарик и отпустить его, то после каждого нечетного столкновения *шарики движутся в одну сторону*, а после каждого четного – *маленький шарик неподвижен*. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили В.Баткин, В.Боровков, Е.Жданов, А.Киприянов, С.Лежнин, М.Махмудиан, А.Ненашев, Е.Пальчиков, А.Погосов, Д.Похабов, Г.Федотович



БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
<ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дискольные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №9)

1. 13.

Головы есть у всех, а хвостов нет только у людей, поэтому людей в лаборатории $40 - 36 = 4$. Ног нет только у змей, а у людей их по две, значит, у мышей $100 - 8 = 92$ ноги. У каждой мыши – 4 ноги, т.е. в лаборатории живут $92 : 4 = 23$ мыши. Таким образом, в лаборатории живет $40 - (4 + 23) = 13$ змей.

2. Треугольник AQC равнобедренный с основанием AC (рис.1). Центр описанной окружности

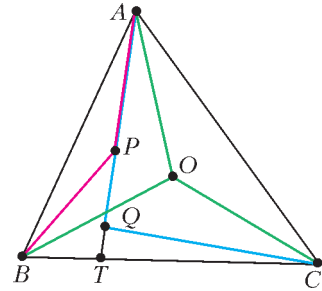


Рис. 1

О равноудален от всех вершин треугольника, значит, треугольник AOC также равнобедренный с основанием AC . Из равнобедренности треугольников получаем, что $\angle QAC = \angle QCA$ и $\angle OAC = \angle OCA$. Так как $\angle QAO = \angle QAC - \angle OAC$ и $\angle QCO = \angle QCA - \angle OCA$, то $\angle QAO = \angle QCO$. Из аналогичных рассуждений для треугольников AOB и APB получаем, что $\angle PAO = \angle PBO$. А раз $\angle PAO$ и $\angle QAO$ это один и тот же угол, то $\angle QCO$ и $\angle PBO$ равны.

3. Могут.

Обозначим некоторые вершины звезды, как показано на рисунке 2, а. Диагональ правильного пятиугольника CE параллельна его стороне AB ; аналогично, BE параллельна CD . Тогда у четырехугольника $BNCE$ две пары параллельных сторон, т.е. это параллелограмм. Кроме того, $BE =$

EC , поскольку это диагонали правильного пятиугольника, значит, $BNCE$ – ромб и $BN = BE$. Разрежем звезду по отрезку BE и переложим части, как показано на рисунке 2, б. При таком перекладывании стороны совпадут, потому что $BN = BE$. Полученная фигура будет состоять из ромба и двух одинаковых невыпуклых пятиугольников, приставленных к его противоположным сторонам, и поэтому будет симметрична относительно центра ромба.

4. Сереже могло быть любое число лет, не превышающее 10.

В невисокосном году – 365 дней. Так как 365 при делении на 7 дает остаток 1, то день недели, на который приходится день рождения, с каждым таким годом сдвигается на 1 (вместо понедельника будет вторник, вместо вторника – среда и так далее). Если же между двумя днями рождения будет 29 февраля високосного года, то произойдет сдвиг на 2 дня. Високосный год бывает либо через 3 года на четвертый, либо через 7 лет на восьмой (но только раз в 100 лет). Запишем самую длинную последовательность дней недели, приходящихся на одну дату в последовательные годы, между двумя пятницами. Дни недели будут в ней идти подряд, а в високосные годы один день будет пропускаться. Для того чтобы Сереже было больше семи лет, хотя бы одну пятницу надо пропустить. В одну сторону от этой пятницы (например, в сторону будущего) високосный год будет на расстоянии 4 лет, поэтому последовательность получится такой: Сб-Вс-Пн-Ср-Чт-Пт. В обратную сторону (в прошлое) она либо такая же, и тогда полная последовательность Пт-Сб-Вс-Вт-Ср-Чт-Сб-Вс-Пн-Ср-Чт-Пт. Между двумя пятницами 10 лет. В первый год Сережа родился, а затем ему исполнилось 1, 2, ..., 9 лет. Либо в сторону прошлого идут подряд семь невисокосных лет, и последовательность между двумя пятницами на год длиннее: Пт-Сб-Вс-Пн-Вт-Ср-Чт-Сб-Вс-Пн-Ср-Чт-Пт. Между двумя пятницами 11 лет. В максимальном случае это будут с нулевого по десятый включительно годы Сережиной жизни.

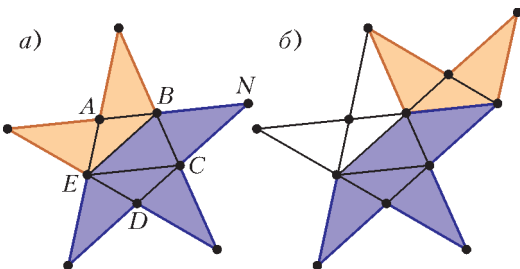


Рис. 2

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Рассеянный атмосферой солнечный свет значительно ярче света звезд.
2. Смотря где. В Антарктиде, например, видны.
3. Кометы и астероиды. Остальные тела Солнечной системы могут наблюдаться только вблизи эклиптики.
4. Свет от звезды, видимой у горизонта, проходит более длинный путь в атмосфере, чем от

звезды в зените, и в большей степени поглощаются. Собственное свечение атмосферы также больше у горизонта, чем вблизи зенита. Поэтому на более ярком фоне у горизонта ослабленный свет звезды кажется еще слабее.

5. Да, поскольку под точечным источником света понимается тот, который имеет размеры, существенно меньшие расстояния, на котором оценивается его действие.

6. Звезды – это массивные раскаленные тела, излучающие собственный свет. А планеты – довольно холодные тела, которые светят отраженным светом звезды.

7. Увеличивается яркость точечного изображения звезды, так как в объектив телескопа попадает больший световой поток, чем в зрачок невооруженного глаза.

8. В космосе есть возможность использовать в процессе наблюдений весь спектр электромагнитного излучения. А при наземных наблюдениях атмосфера в значительной степени поглощает инфракрасные, ультрафиолетовые и рентгеновские лучи.

9. Все звезды движутся, и довольно быстро. Мы не замечаем этого невооруженным глазом потому, что они от нас и друг от друга сильно удалены. По той же причине обычные звезды сталкиваются крайне редко. Поэтому до сих пор астрономы такого не наблюдали.

10. Такая форма соответствует минимуму потенциальной энергии.

11. У звезд. При увеличении энергии звезда расширяется и при этом остывает за счет работы против силы тяготения.

12. В основном это непрерывный спектр теплового излучения, по которому определяется температура поверхности звезды. Спектральные линии излучения атомов в поверхностных слоях звезды дают информацию о ее химическом составе.

13. Холодные звезды в основном излучают в красной и инфракрасной областях спектра, что и определяет их цвет. Горячие звезды дают заметное излучение во всем оптическом диапазоне, которое создает ощущение белого цвета.

14. Эффектом Доплера. Сдвиг линий в красную область спектра соответствует удалению объекта, в фиолетовую – его приближению.

15. Звезды нагреваются за счет термоядерных реакций, проходящих с выделением энергии. В них в основном расходуется водород и образуется гелий.

16. Одна из очевидных возможностей – косвенное обнаружение черной дыры по движению ее звезды-компаньона, видимой в оптическом диапазоне, вокруг общего центра масс.

17. Самый далекий объект, который могли наблюдать древние греки, не располагавшие телескопами, – это туманность Андромеды, находящаяся на расстоянии около 2 миллионов световых лет. Поэтому «заглянуть в прошлое» они могли аж на 2 миллиона лет назад.

Микроопты

Причина лучистого вида звезд связана не с особенностями их строения, а с устройством хрусталика нашего глаза. Пропуская в него лишь тонкий световой пучок, проходящий через центральную часть хрусталика, мы избавляемся от воздействия его структуры и видим звезды как светящиеся точки.

«ПРИЗРАЧНЫЕ» ТРУБЫ

В случае пяти труб первые 4 трубы можно расположить опять же в вершинах вытянутого ромба, а пятую – в середине одной из сторон этого ромба (рис. 3). А шесть труб можно разместить

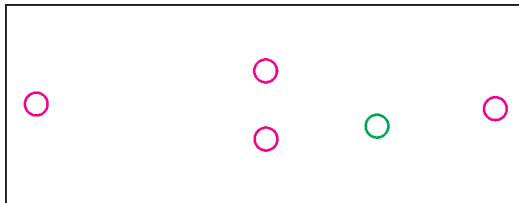


Рис. 3

в вершинах вытянутого ромба и серединах двух его противоположных сторон (рис. 4).

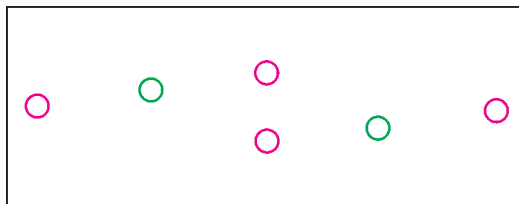


Рис. 4

ЕЩЕ РАЗ О ПОСТРОЕНИИ КАСАТЕЛЬНОЙ

Пусть дана окружность k (красная окружность на рисунке 5) и точка E на ней. Проводим

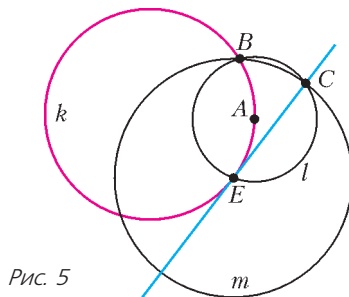


Рис. 5

окружность l с центром в точке A на окружности k так, что l проходит через E , получаем точку B – вторую точку пересечения окружностей k и l . Далее проводим окружность m с центром E и радиусом EB . Пусть C – точка вторичного пересечения окружностей l и m . Тогда прямая CE – касательная к окружности k .

Действительно, из построения вытекает равенство равнобедренных треугольников EAB и EAC . Значит, равны углы ABE и AEC , откуда и следует касание прямой EC и окружности k .

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА**

Ф И З И К А

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН

Механика

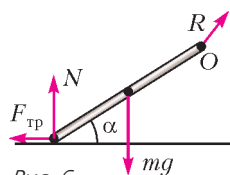


Рис. 6

1. При движении доски влево на стержень действуют силы, модули и направления которых указаны на рисунке 6, где N – нормальная составляющая силы реакции доски, $F_{тр} = \mu N$ – сила трения скольжения, mg – сила тяжести (m – масса стержня), R – сила реакции шарнира. Пусть l – длина стержня. Уравнение моментов, записанное относительно оси, проходящей через точку подвеса стержня (точку O), имеет вид

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha = Nl \cos \alpha + \mu Nl \sin \alpha, \text{ откуда}$$

$$N = \frac{mg}{2(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)}.$$

Поскольку доска движется влево равномерно, то

$$F_1 = F_{тр} = \mu N = \frac{\mu mg}{2(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)}.$$

При движении доски вправо сила трения изменит направление на противоположное. Рассуждая аналогично, находим

$$F_2 = \frac{\mu mg}{2(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}.$$

По условию задачи $\mu \operatorname{tg} \alpha = 0,3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \approx 0,17 < 1$, поэтому

$$F_2 = F_1 \frac{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} \approx 1,42 \text{ Н}.$$

2. Работа силы трения на этапе торможения боба равна $A_{тр} = -\frac{1}{2} \alpha s^2 mg$. Поэтому, по закону сохранения и превращения механической энергии,

$$\left(\frac{mv_0^2}{2} + mgh \right) (1 - \eta) - \frac{1}{2} \alpha s^2 mg = 0.$$

Отсюда находим

$$\eta = 1 - \frac{\alpha s^2 g}{v_0^2 + 2gh} = 0,2, \text{ или } \eta = 20\%.$$

Молекулярная физика и термодинамика

1. Нагревание газа в левом сосуде происходит при постоянном давлении. Совершаемая газом в этом процессе работа равна

$$A_{лев} = \nu R \Delta T.$$

Поскольку сжатие пружины x в правом сосуде совпадает с высотой поршня над дном сосуда, то давление газа в правом сосуде $p = kx/S$ пропорционально его объему: $p \sim V$. При этом прямая, изображающая график процесса на pV -диаграмме, проходит через начало координат. Если обозначить через p_0 , V_0 и T_0 начальные, а через p , V и T – конечные давление, объем и температуру газа, то $\frac{p}{V} = \frac{p_0}{V_0}$, и работа газа равна

$$A_{прав} = \frac{1}{2} (p - p_0) (V - V_0) = \frac{1}{2} (pV - p_0V_0) =$$

$$= \frac{1}{2} \nu R (T - T_0) = \frac{1}{2} \nu R \Delta T.$$

Таким образом, большую работу при нагревании совершит газ в левом сосуде и отношение работ будет равно

$$n = \frac{A_{лев}}{A_{прав}} = 2.$$

2. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона плотность идеального газа ρ_r выражается через его давление p , молярную массу M и абсолютную температуру T по формуле $\rho_r = \frac{pM}{RT}$. По закону Дальтона давление влажного воздуха p_0 равно сумме парциальных давлений сухого воздуха p_n и водяного пара p_n . Поэтому плотность влажного воздуха может быть записана в виде

$$\rho = \frac{p_n M_1 + p_n M_2}{RT} = \frac{(p_0 - p_n) M_1 + p_n M_2}{RT},$$

откуда находим

$$p_n = \frac{p_0 M_1 - \rho RT}{M_1 - M_2}.$$

Учитывая, что относительная влажность воздуха по определению равна

$$\varphi = \frac{p_n}{p_n},$$

а давление насыщенного пара равно

$$p_n = \frac{\rho_0 RT}{M_2},$$

получаем (в процентах)

$$\varphi = \frac{(p_0 M_1 - \rho RT) M_2}{(M_1 - M_2) \rho_0 RT} \cdot 100\% \approx 84\%.$$

Электродинамика

1. До раздвигания пластин энергия конденсатора была $W_{\text{н}} = \frac{CU^2}{2}$. После раздвигания пластин емкость конденсатора уменьшилась в n раз, а его энергия стала $W_{\text{к}} = \frac{CU^2}{2n}$. При этом через источник протек заряд $\Delta q = \left(\frac{1}{n} - 1\right)CU$. Следовательно, работа сторонних сил источника за время раздвигания пластин равна $A_{\text{ист}} = U\Delta q = \left(\frac{1}{n} - 1\right)CU^2$. Согласно закону изменения энергии справедливо равенство

$$W_{\text{н}} + A_{\text{мех}} + A_{\text{ист}} = W_{\text{к}},$$

откуда находим

$$A_{\text{мех}} = W_{\text{к}} - W_{\text{н}} - A_{\text{ист}} = \frac{CU^2}{2} \left(\frac{n-1}{n}\right) = 0,6 \text{ мДж}.$$

2. Начальная энергия двух заряженных конденсаторов была

$$W_0 = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

После соединения разноименно заряженных обкладок суммарный заряд на них станет $q = |C_2 U_2 - C_1 U_1|$. Поскольку конденсаторы соединили параллельно, их полная энергия после перезарядки будет

$$W_1 = \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Искомое отношение энергий равно

$$k = \frac{W_1}{W_0} = \frac{(C_2 U_2 - C_1 U_1)^2}{(C_1 + C_2)(C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2)} = \frac{1}{28}.$$

Оптика

1. Скорость движущейся точки отражается в плоском зеркале так же, как любой объект. Поэтому скорости изображений точек в зеркалах имеют одинаковую величину, а их направления образуют угол $2\alpha = 120^\circ$ (рис.7). Как

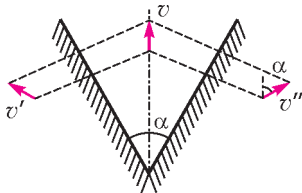


Рис. 7

легко видеть, скорость взаимного сближения (или удаления) изображений равна $u = 2v \sin \alpha$. Из законов кинематики равномерного прямолинейного движения следует, что $\Delta t = \frac{\Delta x}{u}$. Таким

образом,

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2v \sin \alpha} \approx 3,5 \text{ с}.$$

2. Наибольший угол преломления на поверхности жидкости будет у лучей света, падающих по касательной к поверхности. Поэтому в толще жидкости образуется расходящийся конус лучей света, ограниченный предельным углом, для которого $\sin \alpha = \frac{1}{n}$. При отражении от зеркала на дне угол раствора конуса не изменяется, следовательно, радиус освещенной области на нижней поверхности экрана и площадь этой области равны, соответственно,

$$R = 2htg\alpha = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} \text{ и } S = \frac{4\pi h^2}{n^2 - 1} \approx 1005 \text{ см}^2.$$

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ»

МАТЕМАТИКА

11 класс

Вариант 1

1. 3.

Заметим, что на ОДЗ ($x > 2$) сумма всех трех логарифмов равна

$$\log_{x^2} \left(\frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2}{x-1} (x^2 - 3x + 2) \right) = \log_{x^2} x^4 = 2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других, через c , а два оставшихся числа – через a и b . Тогда $c = a + b$ и $a + b + c = 2$, откуда следует, что $c = 1$, т.е. один из трех данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трех данных логарифмов равен 1, то, поскольку сумма всех трех логарифмов равна 2, два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно логарифмируемому выражению. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x^2 = \frac{x^2}{x-2}, \\ x^2 = \frac{x^2}{x-1}, \\ x^2 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3, \\ x = 2, \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = 3$ удовлетворяет ОДЗ.

2. $\frac{5}{2}$.

Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = 3(f(x))^2 + 2g(x)$. Раскрывая скобки, получаем

$$h(x) = 3(ax + b)^2 + 2(ax + c) = 3a^2x^2 + 2a(3b + 1)x + 3b^2 + 2c.$$

График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх; минимальное значение принимается в вершине.

Абсциссой вершины является $x_b = -\frac{3b+1}{3a}$; ордината вершины равна $h(x_b) = -2b - \frac{1}{3} + 2c$. Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $3(g(x))^2 + 2f(x)$ равно $-2c - \frac{1}{3} + 2b$.

Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{2}{3}$, следовательно, если одно из минимальных значений равно $-\frac{19}{6}$, то второе равно $-\frac{2}{3} + \frac{19}{6} = \frac{5}{2}$.

Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{2}{3}$, следовательно, если одно из минимальных значений равно $-\frac{19}{6}$, то второе равно $-\frac{2}{3} + \frac{19}{6} = \frac{5}{2}$.

3. 80676.

Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C , CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 25$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 5$, $AH = 25$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 25$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB , равную 10, можно расположить $190 \cdot 2 = 380$ способами (по 200 – 10 способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 26, и ее можно расположить $2(200 - 26) = 348$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины C – получаем $2 \cdot 348 = 696$ способов.

2) Один из катетов треугольника, назовем его BC , перпендикулярен данной прямой, а второй катет, AC , лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 200 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 398 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $200 \cdot 398 = 79600$ способов.

Итого получаем $380 + 696 + 79600 = 80676$ способов.

4. $\frac{3}{2}$.

На ОДЗ первое равенство равносильно следующему:

$$\frac{\cos x \sin y + \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sin(x + y) = 3 \sin x \sin y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$4 \sin(x + y) \cos(x + y) = 4 \sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $3 \sin x \sin y$ вместо $\sin(x + y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\sin x \sin y \neq 0$):

$$\begin{aligned} 12 \sin x \sin y \cos(x + y) &= 4 \sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \cos(x + y) &= \cos x \cos y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \cos x \cos y - 3 \sin x \sin y &= \\ = \cos x \cos y \Leftrightarrow 2 \cos x \cos y &= 3 \sin x \sin y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

5. $\angle ACB = 120^\circ$, $MK = 3$, $AB = \frac{5\sqrt{7}}{2}$, $S_{\Delta CMN} = \frac{45\sqrt{3}}{28}$.

Обозначим (рис.8) центр окружности через O , основание высоты треугольника, проведенной из вершины C , через H , а угол BAC через α .

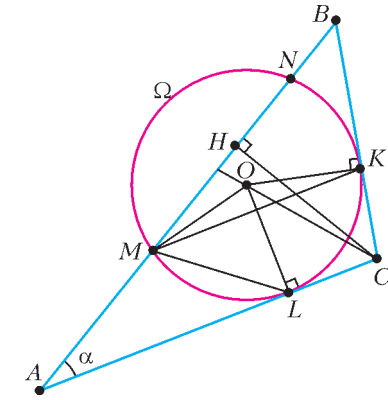


Рис. 8

Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120^\circ$. В четырехугольнике $OLCK$ по теореме о сумме углов четырехугольника находим, что $\angle LOK = 60^\circ$. Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник $МОК$ – равнобедренный, высота в нем является биссектрисой, зна-

чит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2MO \sin 60^\circ = 3$.

Поскольку $\angle MOL = \frac{1}{2}\angle MOK = 60^\circ$, $MO = LO$, то треугольник MOL равносторонний, $\angle MLO = 60^\circ$, $ML = \sqrt{3}$. Тогда $\angle ALM = \angle ALO - \angle MLO = 30^\circ$.

Рассмотрим треугольник ALM . По теореме косинусов получаем, что

$$AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2AL \cdot LM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7.$$

По теореме синусов $\frac{AM}{\sin 30^\circ} = \frac{LM}{\sin \alpha}$, откуда $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Так как угол α лежит напротив меньшей стороны треугольника, то он острый. Из треугольника ACH получаем, что

$$CH = AC \sin \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

По теореме о касательной и секущей $AL^2 = AM \cdot AN$, откуда $AN = \frac{16}{\sqrt{7}}$, $MN = AN - AM = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Тогда площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{2}CH \cdot MN = \frac{45\sqrt{3}}{28}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BKA подобны, при этом коэффициент подобия равен $KM : CA = 3 : 5$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{5}$, $\frac{BA - \sqrt{7}}{BA} = \frac{3}{5}$, $AB = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

6. 1; 104; 191.

Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \dots, k+6$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+6]$, то сумма расстояний от него до данных семи чисел не превосходит $\frac{7}{2} \cdot 6 = 21$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 6, сумма расстояний до $k+1$ и $k+5$ не превосходит 6, сумма расстояний до $k+2$ и $k+4$ также не превосходит 6, расстояние до $k+3$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 3). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k; k+6]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|7a - k - (k+1) - \dots - (k+6)| = 7|a - k - 3|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $7|b - k - 3|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 7|a - k - 3| = 609, \\ 7|b - k - 3| = 721, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a - k - 3| = 87, \\ |b - k - 3| = 103, \\ a + b = 192. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k; k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 3 = 87, \\ b - k - 3 = 103, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 88, \\ b = 104, \\ k = -2. \end{cases}$$

Ввиду того что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k; k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 3 = 87, \\ -b + k + 3 = 103, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 104, \\ b = 88, \\ k = 188. \end{cases}$$

3) Число a лежит справа, а b — слева от отрезка $[k; k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 3 = 87, \\ -b + k + 3 = 103, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 191, \\ b = 1, \\ k = 101. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a — слева от отрезка $[k; k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 3 = 87, \\ b - k - 3 = 103, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 191, \\ k = 85. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a = 1$, $a = 104$, $a = 191$.

7. а) $A_1A = 18$, б) $V = 1944$, $R = 3\sqrt{10}$.

а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником (рис.9). В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F — точка касания данной сферы с ребром BC . Отрезки CK и CF равны как касательные к

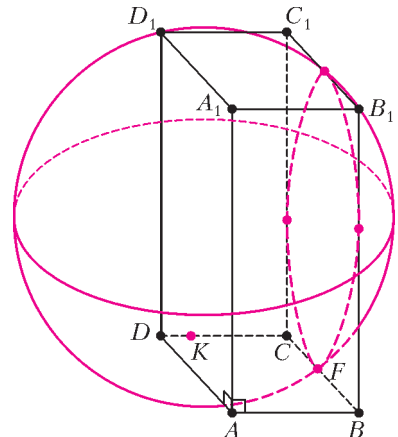


Рис. 9

сфере, проведенные из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина BC и $BC = 2CF = 2CK = 18$. Значит, $AA_1 = CC_1 = BC = 18$.

б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудален от прямых AD и A_1D_1 . Значит, если сфера касается одного из этих ребер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с ребром AD через M , а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $ABCD$, через ω . Пусть O – центр ω .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому

$$\begin{aligned} \angle OCD + \angle ODC &= \\ &= \frac{1}{2}(\angle FCD + \angle MDC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Таким образом, треугольник OCD прямоугольный, $OK = \sqrt{CK \cdot DK} = 3$.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $BC \cdot FM = 2CF \cdot 2OK = 2 \cdot 9 \cdot 6 = 108$. Объем параллелепипеда равен $AA_1 \cdot S_{ABCD} = 18 \cdot 108 = 1944$. Пусть Q – центр сферы. Тогда OK – ее радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный. Отсюда

$$OQ = \sqrt{OK^2 + OQ^2} = \sqrt{OK^2 + \frac{1}{4}AA_1^2} = 3\sqrt{10}.$$

Вариант 2

1. $\frac{7}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

Заметим, что на ОДЗ ($x > 3, x \neq 4$) произведение всех трех логарифмов равно

$$\log_x \left(x - \frac{3}{2} \right) \cdot \log_{x-\frac{3}{2}} (x-3) \cdot \log_{x-3} x = 1.$$

Обозначим то число, которое равно произведению двух других, через c , а два оставшихся числа – через a и b . Тогда $c = ab$ и $abc = 1$, откуда следует, что $c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm 1$, т.е. один из трех данных логарифмов равен ± 1 .

Верно и обратное, а именно, если один из трех данных логарифмов равен ± 1 , то поскольку произведение всех трех логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ± 1 , т.е. первому логарифму.

Заметим, что у всех трех данных логарифмов основание и логарифмируемое выражение не равны ни при каких x , поэтому они отличны от 1. Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1 , когда произведение его основания и логарифмируемого выражения равно 1. Получа-

ем совокупность

$$\begin{cases} x(x - \frac{3}{2}) = 1, \\ x(x - 3) = 1, \\ (x - 3)(x - \frac{3}{2}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x = \frac{7}{2}, \\ x = 1. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = \frac{7}{2}$

и $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. $-7; 0$.

По условию имеем: $g(x) = f(x) + k$, $g'(x) = f'(x) \neq 0$. Условие касания графиков функций $y = (f(x))^2$ и $y = 7g(x)$ означает существование точки x_0 , для которой выполнены условия: (1) $2f(x_0) \cdot f'(x_0) = 7g'(x_0)$; (2)

$f^2(x_0) = 7g(x_0)$. Из первого условия находим $f(x_0) = \frac{7}{2}$ и, подставляя во второе, получаем $k = -\frac{7}{4}$.

Аналогично, касание графиков функций $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает наличие такой точки x_1 , для которой выполнены условия: (3) $2g(x_1) \cdot g'(x_1) = Af'(x_1)$; (4) $g^2(x_1) = Af(x_1)$.

Из условия (3) следует $g(x_1) = \frac{A}{2} \Rightarrow f(x_1) = \frac{A}{2} + \frac{7}{4}$.

Подставляя эти соотношения в (4), получим уравнение $A^2 + 7A = 0$, которое выполняется при $A = 0$ или $A = -7$.

Замечание. Из решения видно, что линейность функций $f(x)$ и $g(x)$ несущественна; важно лишь, чтобы график одной из функций получался из графика другой вертикальным сдвигом и при этом производные функций существовали и не обращались в ноль.

3. 5111. Такие квадратные трехчлены можно представить в виде $(x - 3^a)(x - 3^b)$, где $a \geq 0, b \geq 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geq b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - (3^a + 3^b)x + 3^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 3^a + 3^b \leq 27^{47}, \\ 3^{a+b} \leq 27^{47} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^a + 3^b \leq 3^{141}, \\ a + b \leq 141. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a = 141, b = 0$. Для каждого значения выпишем количество подходящих зна-

чений b :

- $a = 141 \Rightarrow 0$ значений b ;
- $a = 140 \Rightarrow 2$ значения b ($b \in \{0; 1\}$);
- $a = 139 \Rightarrow 3$ значения b ($b \in \{0; 1; 2\}$);
-
- $a = 71 \Rightarrow 71$ значение b ($b \in \{0; 1; \dots; 70\}$);
- $a = 70 \Rightarrow 71$ значение b ($b \in \{0; 1; \dots; 70\}$);
- $a = 69 \Rightarrow 70$ значений b ($b \in \{0; 1; \dots; 69\}$);
- $a = 68 \Rightarrow 69$ значений ($b \in \{0; 1; \dots; 68\}$);
-

$a = 1 \Rightarrow 2$ значения b ($b \in \{0; 1\}$);
 $a = 0 \Rightarrow 1$ значение b ($b = 0$).
 Суммируя, получаем $(2 + 3 + 4 + \dots + 71) + (71 + 70 + 69 + \dots + 1) = 5111$ вариантов.

4. $-1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y = 2 \sin x \cos x - 2 \sin 3x \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2y = 2 \sin x (\cos x - \sin 3x).$$

Подставляя сюда $-\cos y$ вместо $\cos x - \sin 3x$, получаем

$$\sin 2y = -2 \sin x \cos y,$$

$$2 \sin y \cos y + 2 \sin x \cos y = 0,$$

$$\cos y (\sin y + \sin x) = 0,$$

откуда есть две возможности.

- 1) $\sin x + \sin y = 0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.
- 2) $\cos y = 0$. Тогда $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\cos x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - \pi k, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значит, минимальное значение суммы $\sin y + \sin x$ принимается при $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и оно равно $-1 - \sin \frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin \frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos \frac{3\pi}{4} = 1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{8}$, откуда

$$\sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Итак, при заданных условиях

$$\min(\sin x + \sin y) = -1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

5. $AD = 10, BK = \frac{48}{5}, P_{EBM} = \frac{84}{5}$.

Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно (рис.10). Тогда по

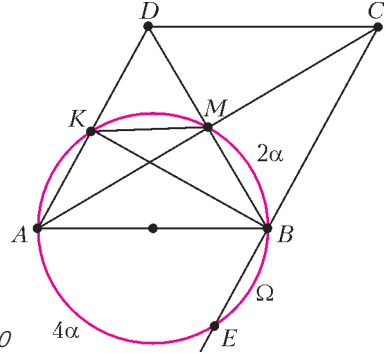


Рис. 10

теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, ABCD – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, поэтому угол ANB – прямой и AB – диаметр окружности. Тогда $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что AEBK – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Радиус окружности равен 5, значит, $EK = AB = 10$; $AD = AB = 10$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (так как равны соответствующие им дуги), $BM = 6$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 8$, и из треугольника ABM находим, что $\cos \alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$.

Далее вычисляем: $BK = AB \sin 2\alpha = 10 \cdot \frac{24}{25} = \frac{48}{5}$; $BE = AB \cos 2\alpha = 10 \cdot \frac{7}{25} = \frac{14}{5}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 8$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $6 + 8 + \frac{14}{5} = \frac{84}{5}$.

6. $-1,25$.

Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k + 1, \dots, k + 15$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k + 15]$, то сумма расстояний от него до данных шестнадцати чисел не превосходит $8 \cdot 15 = 120$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 15, сумма расстояний до $k + 1$ и $k + 14$ не превосходит 15, сумма расстояний до $k + 2$ и $k + 13$ также не превосходит 15 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k; k + 15]$. Тогда сумма расстояний от числа до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой

$$|16a - k - (k + 1) - \dots - (k + 15)| = |16a - 16k - 120|.$$

Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|16a^2 - 16k - 120|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |16a^2 - 16k - 120| = 591, \\ |16a - 16k - 120| = 636. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k; k + 15]$. Тогда

$$\begin{cases} 16a^2 - 16k - 120 = 591, \\ 16a - 16k - 120 = 636 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a - 16k - 120 = 636, \\ 16a^2 - 16a + 45 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k; k + 15]$. Тогда

$$\begin{cases} 16k + 120 - 16a^2 = 591, \\ 16k + 120 - 16a = 636 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16k + 120 - 16a = 636, \\ 16a^2 - 16a - 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 32,25, \\ a = -1,25, \\ a = 2,25. \end{cases}$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то подходит только случай $a = -1,25$ (тогда $k = 31$); в случае $a = 2,25$ оказывается, что $k = 34,5$.

3) Число a лежит слева, а a^2 — справа от отрезка $[k; k + 15]$. Тогда

$$\begin{cases} 16a^2 - 16k - 120 = 591, \\ 16k + 120 - 16a = 636 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16k + 120 - 16a = 636, \\ 16a^2 - 16a - 1227 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $2a^2 - 2a - \frac{1227}{8} = 0$; $D = 4 + 1227 = 1231$;

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{1231}}{4}.$$

Тогда из первого уравнения системы следует, что k — иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 — слева от

отрезка $[k; k + 15]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0; 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только $a = -1,25$.

7. $AA_1 = 26, R = 5, V = 1250$.

Так как центр сферы — середина отрезка C_1M — лежит в грани BCC_1B_1 , то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок C_1M не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырех граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани CC_1D_1D (касание означало бы, что $MC_1 \perp CC_1D_1D$, и отсюда следовало бы, что плоскости CC_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD, A_1B_1C_1D_1, AA_1D_1D$ и ABB_1A_1 , притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 , обозначим ее T .

Рассмотрим параллелограмм BB_1CC_1 . Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1C_1 = BC = BM + MC = 1 + 24 = 25$. Используя равенство касательных, проведенных к окружности из одной точки, находим, что $B_1T = B_1C_1 = 25, BT = BM = 1$. Значит, $AA_1 = CC_1 = BB_1 = BT + TB_1 = 26$. По теореме Пифагора для треугольника CC_1M находим, что $C_1M = \sqrt{CC_1^2 - CM^2} = 10$, откуда радиус сферы равен 5.

Объем параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем BCC_1B_1 ; тогда высота равна радиусу сферы (так как центр сферы лежит в грани BCC_1B_1 и она касается грани AA_1D_1D). Площадь основания равна $C_1M \cdot BC = 10 \cdot 25 = 250$. Следовательно, $V = 5 \cdot 250 = 1250$.

Избранные задачи для 10 класса

1. Чисел, содержащих только нечетные цифры,

$$\text{больше на } \frac{5^{21} - 5}{4}.$$

Рассмотрим k -значные числа ($1 \leq k \leq 20$). Количество чисел, состоящих только из нечетных цифр, равно 5^k (на каждую из k позиций можно выбрать любую из цифр 1, 3, 5, 7, 9); количество чисел, состоящих только из четных цифр, равно $4 \cdot 5^{k-1}$ (на первую позицию можно выбрать любую из цифр 2, 4, 6, 8, а на оставшиеся позиции — любую из цифр 0, 2, 4, 6, 8). Следовательно, k -значных чисел, содержащих в своей записи только нечетные цифры, на $5^k - 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{k-1}$ больше, чем чисел, содержащих в своей записи только четные цифры.

Рассмотрим 21-значные числа, не превосходящие $8 \cdot 10^{20}$. Чисел, записанных только нечетными

ми цифрами, среди них $4 \cdot 5^{20}$, а чисел, записанных только четными цифрами, $3 \cdot 5^{20} + 1$ (не забываем учесть само число $8 \cdot 10^{20}$).

Итак, чисел, записанных только нечетными цифрами, больше на

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{19} + 5^{20} - 1 = \frac{5^{21} - 1}{5 - 1} - 1 = \frac{5^{21} - 5}{4}.$$

2. 10.

Для существования различных корней уравнения его дискриминант должен быть положительным, откуда $a^2 - 20 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = 5$. Тогда

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = a^2 - 5.$$

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^2 - x_2^2 + \frac{250}{19} \cdot \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^3 x_2^3} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + \frac{250(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)}{19(x_1 x_2)^3} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставив указанные выше значения, получим

$$-a + \frac{50}{19} \cdot \frac{a^2 - 5}{125} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 19a - 10 = 0,$$

откуда $a = 10$ или $a = -0,5$. Неравенству $a^2 - 20 > 0$ удовлетворяет только $a = 10$.

3. а) $AB : CD = 4 : 5$, б) $AB = 4$, $CD = 5$.

а) Так как биссектриса треугольника делит его сторону пропорционально двум другим сторонам, то $AB : BD = AM : MD = 2 : 3$ и $BD : DC = BN : NC = 6 : 5$. Следовательно,

$$AB : CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = 4 : 5.$$

б) Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник ABD , с его сторонами AB , AD , BD через P , F , K соответственно; точки касания окружности, вписанной в треугольник BCD , с его сторонами BC , CD , BD — через Q , E , K соответственно (по условию точка касания со стороной BD общая).

Пусть $BK = x$, $KD = y$. Используя равенство отрезков касательной, проведенных к окружности из одной точки, получаем соотношения

$$BQ = BP = BK = x, DF = DE = DK = y,$$

$$AF = AD - DF = 4 - y, AP = AF = 4 - y,$$

$$CQ = BC - BQ = 5 - x, CE = CQ = 5 - x,$$

$$AB = AP + PB = 4 + x - y, CD = 5 - x + y.$$

В пункте а) было получено, что $AB : CD = 4 : 5$,

откуда $\frac{4 + x - y}{5 - x + y} = \frac{4}{5}$, $x = y$. Тогда $AB = 4$, $CD = 5$.

4. 22386.

Будем брать карточки по очереди. Возможны несколько случаев в зависимости от того, какое число написано на первой карточке.

1) Номер на карточке оканчивается на 00 (таких карточек 21 штука). Для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней также оканчивался на 00. Всего получаем $C_{21}^2 = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ вариантов.

2) Аналогично, если номер на карточке оканчивается на 50 (таких карточек также 21 штука), то для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней оканчивался на 50, т.е. и здесь 210 вариантов.

3) Номер на карточке оканчивается на число от 1 до 17 (таких карточек $17 \cdot 22 = 374$). Для каждой из них пару можно выбрать 21 способом (если число оканчивается на 1, то подойдет любая карточка с числом, оканчивающимся на 99; если число оканчивается на 2 — любая карточка с числом, оканчивающимся на 98, и т.д.). Таким образом, получаем $374 \cdot 21 = 7854$ варианта.

4) Номер на карточке оканчивается на число от 18 до 49 (таких карточек $32 \cdot 21 = 672$). Для каждой из них пару можно выбрать 21 способом (аналогично предыдущему случаю). Таким образом, получаем $672 \cdot 21 = 14112$ вариантов.

5) Номер на карточке оканчивается на число от 51 до 99. Все такие варианты были учтены при рассмотрении третьего и четвертого случаев (эти карточки составляли пару карточкам, выбранным первоначально).

Итого выходит $210 + 210 + 7854 + 14112 = 22386$ способов.

5. $a = 4$.

Для существования различных корней уравнения его дискриминант должен быть положительным, откуда $a^2 - 8 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = 2$. Тогда

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = a^2 - 2.$$

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^3 - x_2^3 + 14 \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + \frac{14(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^2} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем

$$a^2 - 2 - \frac{14a}{4} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 7a - 4 = 0,$$

откуда $a = -0,5$ или $a = 4$. Неравенству $a^2 - 8 > 0$ удовлетворяет только $a = 4$.

6. а) $AP : PC = 4$, б) $BD = \frac{35}{\sqrt{19}}$.

а) Так как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, то $\angle PBC = \angle PAD$, $\angle PCB = \angle PDA$. Следовательно, треугольники PBC и PDA подобны. Аналогично доказывается, что $\triangle ABP \sim \triangle DCP$. Соответствующие элементы подобных фигур относятся как коэффициент подобия. В данном случае в качестве соответствующих элементов выступают высоты, проведенные из вершины P . Отсюда находим, что коэффициент подобия равен $k_1 = \frac{\sqrt{19}}{8}$ для первой пары и $k_2 = \frac{\sqrt{19}}{2}$ для второй пары.

Пусть $AP = 8x$. Тогда $BP = AP \cdot k_1 = x\sqrt{19}$, $CP = \frac{BP}{k_2} = 2x$, $DP = \frac{AP}{k^2} = \frac{16x}{\sqrt{19}}$.

Значит, $AP : PC = 8x : 2x = 4 : 1$.

б) Если $AC = 10$, то $8x + 2x = 10$, $x = 1$.

Следовательно, $BD = BP + DP = \frac{35}{\sqrt{19}}$.

ФИЗИКА

9 класс

1. 1) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{8}$.

2. $H_0 = \frac{4}{3}H = 2,4$ м.

3. 1) $F_{\text{мин}} = 4\mu mg$; 2) $t = \sqrt{\frac{6mL}{F - 4\mu mg}}$.

4. 1) $M = \frac{3}{4}\rho a^2 H$; 2) $h = \frac{H}{4} \left(1 + \frac{\rho g a^2}{k} \right)$.

5. 1) $R = \frac{U}{I} = 18$ Ом; 2) $r = \frac{16}{9}R = 32$ Ом.

10 класс

1. 1) $a_1 = \frac{F}{4m}$; 2) $a_2 = \frac{F - 6\mu mg}{4m}$.

2. 1) $m_0 = \rho H_1 S = 500$ г;

2) $m = \rho \left(V + \frac{m_0}{\rho_0} \right) - m_0 = \rho \left(V - H_1 S \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \right) = 500$ г;

3) $H_2 = \frac{m}{\rho S} = \frac{V}{S} - H_1 \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = 2$ см.

3. 1) $a_2 = (k_2 - 1)g = 4$ м/с²;

2) $u = \frac{k_1 k_2 g (t_2 - t_1)}{k_2 - k_1} = 1680$ м/с.

4. 1) $\phi_1 = 1$ (100%); 2) $\phi_2 = \frac{1}{4}$ (25%).

5. 1) $\frac{T_2}{T_3} = 4$; 2) $\frac{Q_{12}}{Q_{31}} = \frac{93}{35}$.

11 класс

1. 1) $T_0 = \frac{1}{4}F$; 2) $T = \frac{6}{17}(F - 2\mu mg)$.

2. 1) $\frac{Q_{12}}{A_{12}} = 4$; 2) $C = -\frac{3}{2}R$.

3. 1) $q = \frac{m(\omega_1 + \omega_2)}{B}$; 2) $R = 3\sqrt{\frac{km(\omega_1 + \omega_2)^2}{4\omega_1\omega_2 B^2}}$.

4. 1) $I'_{L0} = \frac{\varepsilon R}{L(R+r)} = \frac{5\varepsilon}{6L}$; 2) $I_L = \frac{1\varepsilon}{3r}$;

3) $Q = \frac{1}{18} \frac{L\varepsilon^2}{r^2}$.

5. 1) $f = 3F = 60$ см; 2) $H = 2h = 2$ см;

3) $v_A = 3v = 3$ мм/с.

**НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На систему поплавков – грузило, действуют силы тяжести и силы Архимеда. Условие равновесия поплавок до и после обрыва нити запишется в виде

$$Mg + mg = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{II}} + \rho_{\text{ж}} g \frac{m}{\rho}, \quad Mg = \rho_{\text{ж}} g V'_{\text{II}},$$

где M – масса поплавок, V_{II} , V'_{II} – объемы погруженной в жидкость части поплавок до и после обрыва нити соответственно, m/ρ – объем поплавок, а $\rho_{\text{ж}}$ – искомая плотность жидкости. Поскольку грузило всегда полностью погружено в жидкость, то изменение уровня жидкости в сосуде связано с изменением объема погруженной части поплавок: $V_{\text{II}} = V'_{\text{II}} + S\Delta h$. Отсюда найдем

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{\rho}{1 + \frac{\rho S \Delta h}{m}}$$

2. Разделим проводник мысленно на N (N – большое число) тонких дисков толщиной l/N , где l – высота проводника, т.е. расстояние между верхним и нижним основаниями. Поскольку диски соединены последовательно, сопротивление между основаниями конуса будет равно сумме сопротивлений дисков:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N = \frac{\rho l}{N} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_N} \right).$$

Рассуждая аналогично, можно получить выражение для сопротивления уменьшенной копии:

$$R' = \frac{\rho l'}{N} \left(\frac{1}{S'_1} + \frac{1}{S'_2} + \dots + \frac{1}{S'_N} \right).$$

Поскольку масса копии в 8 раз меньше, а оба тела сплошные и плотность материала, из которого они сделаны, одинакова, то объем умень-

шенной копии также в 8 раз меньше. Следовательно все ее линейные размеры, в частности высота и диаметры оснований, будут в $\sqrt[3]{8} = 2$ раза меньше, а площади оснований соответствующих дисков – в 4 раза меньше. Сравнив R и R' , получим

$$\frac{R'}{R} = 2.$$

3. Из симметрии задачи ясно, что кольцо всегда будет двигаться в направлении, перпендикулярном отрезку, соединяющему центры бусинок. Когда расстояние между бусинками станет $2R$, они окажутся на диаметрально противоположных точках кольца. Поскольку скорости бусинок v направлены по касательной к кольцу, они в этот момент будут параллельны скорости кольца u . Поэтому, согласно закону сохранения импульса,

$$0 = 2mv + Mu.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{kq^2}{R} = \frac{kq^2}{2R} + \frac{2mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$u = \sqrt{\frac{2mkq^2}{MR(M+2m)}}.$$

4. На доску действуют сила тяжести mg , направленная вертикально вниз, сила реакции опоры N , направленная вертикально вверх, две силы натяжения нити T_1 и T_2 , направленные вдоль нити, и сила трения $F_{\text{тр}}$, направленная горизонтально

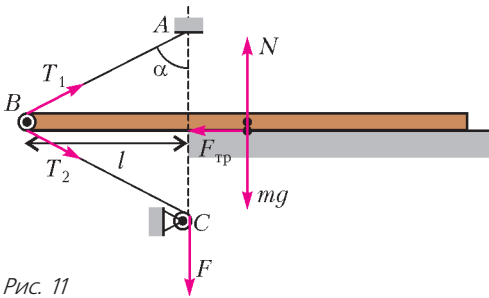


Рис. 11

влево (рис.11). Так как нить нерастяжимая и трения в блоках, то

$$T_1 = T_2 = F = \mu mg.$$

Поскольку в процессе вытягивания нити доска движется только в горизонтальном направлении, сумма всех сил в проекции на вертикальную ось равна нулю. Учитывая, что вертикальные составляющие сил натяжения нити друг друга взаимно компенсируют, условие покоя в вертикальном направлении примет вид $N = mg$. В процессе скольжения доски по столу сила трения равна $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Работа силы по вытягиванию нити идет на приращение кинетической энергии доски, а также на работу против силы трения:

$$F\Delta L = \frac{mv^2}{2} + F_{\text{тр}}\Delta l,$$

где ΔL – длина вытянутой части нити, Δl – перемещение доски вдоль стола. В процессе вытягивания нити угол α изменяется в диапазоне от 60° до 0 . Сумма горизонтальных сил, действующих на доску, равна

$$F_{\text{гор}} = T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha - F_{\text{тр}} = \mu mg(2 \sin \alpha - 1).$$

Эта сила положительна при $60^\circ \geq \alpha \geq 30^\circ$ и ускоряет доску, после чего меняет знак на противоположный и, соответственно, замедляет доску. Поэтому скорость доски максимальна при $\alpha = 30^\circ$, когда ускоряющая сила обращается в ноль. Из геометрических соображений найдем

$$\Delta L = \frac{4(\sqrt{3}-1)l}{3}, \quad \Delta l = \frac{2l}{3}.$$

Окончательно получим

$$v = \sqrt{\frac{2\mu gl}{3}(4\sqrt{3}-6)}.$$

5. В системе отсчета Мэри Поппинс зонтик покоится, а на него налетает поток воздуха. За время τ на зонтик площадью S налетает со скоростью v поток воздуха массой $m = \rho v S \tau$, где ρ – плотность воздуха, которую при нормальных условиях можно найти как отношение массы одного моля воздуха M к объему одного моля воздуха V : $\rho = M/V$. Этот поток передает зонтику импульс $p = mv$. Таким образом, сила сопротивления воздуха равна

$$F = \frac{p}{\tau} = \rho v^2 S.$$

В равновесии сила сопротивления воздуха равна силе тяжести:

$$F = Mg.$$

Отсюда найдем

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}} = \sqrt{\frac{MgV}{M\pi r^2}},$$

где r – радиус зонтика. Подставив численные значения $r = 1$ м, $g = 10$ м/с², $M = 50$ кг, $V = 0,0224$ м³, $M = 0,029$ кг, получим $v \approx 10$ м/с.

Открытая межвузовская олимпиада «Будущее Сибири»

Первый (отборочный) этап

8 класс

$$1. L = v(t_1 + t_2) = 4\left(1 + \frac{1}{4}\right) \text{ км} = 5 \text{ км}.$$

$$2. v = \frac{d t_2 - t_1}{t_3 t_2 + t_1} \quad 3. x = L \frac{m_1 - m_2}{2m_2}.$$

$$4. m = 2\Delta m \frac{T_1 - T_2}{T_0 + T_2 - 2T_1}.$$

9 класс

1. $l_1 = 0,4L = 4 \text{ см}$ и $l_2 = 0,6L = 6 \text{ см}$ или $l_1 = 0,6L = 6 \text{ см}$ и $l_2 = 0,4L = 4 \text{ см}$.

$$2. \Delta m = \frac{m T_0 + T_2 - 2T_1}{2 T_1 - T_2}.$$

$$3. x = H + \frac{v^2 (\sin 2\alpha - \sin^2 \alpha)}{2g}.$$

$$4. t = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\omega r} + \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

10 класс

$$1. F_C = F_A \frac{OA}{\sqrt{OB^2 + BC^2}} = 12 \text{ Н}.$$

$$2. n > N \left(1 - \frac{V_0}{V} \frac{m}{M_B - M_r} \right) = 11,6, \text{ значит, } n_{\min} = 12.$$

3. Края стола раньше достигнет камешек.

$$4. \alpha = \arctg \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2}.$$

11 класс

1. $l_1 = 0,3L = 3 \text{ см}$ и $l_2 = 0,7L = 7 \text{ см}$ или $l_1 = 0,7L = 7 \text{ см}$ и $l_2 = 0,3L = 3 \text{ см}$.

$$2. P_1 = \frac{7}{12} P, P_2 = \frac{5}{12} P.$$

3. Заряд надо увеличить в 6 раз.

$$4. \Delta x = \frac{-2mg \sin \alpha + \sqrt{(2mg \sin \alpha)^2 + kmv^2}}{k\sqrt{2}}.$$

Второй (заключительный) этап

8 класс

$$1. T_0 = T_{\text{л}} - \frac{1}{7} \frac{c_{\text{в}} T_{\text{в}} + \lambda - c_{\text{л}} T_{\text{л}}}{c_{\text{л}}} = -50 \text{ }^\circ\text{C}. \quad 2. k = \frac{6}{5}.$$

$$3. x = l + \frac{u}{v} (L - l) = 5 \text{ км (впереди идущая машина находится во втором тоннеле)}.$$

$$4. m = M \frac{a - b}{2b}.$$

9 класс

$$1. k = \frac{5}{4}.$$

$$2. R_{AB} = R_{BC} = R_{DA} = 1 \text{ кОм}, R_{CD} = 4 \text{ кОм}.$$

$$3. H = L \left(\frac{F}{mg} - \text{tg } \alpha \right) \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

$$4. F \geq mg \frac{\mu - d/(4h)}{d/(2h) - \mu} \text{ при } \frac{d}{4h} < \mu < \frac{d}{2h}; \text{ при } \frac{d}{2h} < \mu \text{ скольжения не будет при любой силе}.$$

$$5. Q = V \sqrt{\frac{gS}{2(LS - V)}}.$$

10 класс

$$1. r = 1 \text{ кОм}, R = 2 \text{ кОм}. \quad 2. Q = \frac{m^2 g^2}{k}.$$

$$3. p_2 = p_1 + \rho g H. \quad 4. \Delta H = \frac{9}{11} h = 9 \text{ см}.$$

$$5. \beta = \arcsin(\mu \text{ctg } \alpha).$$

11 класс

$$1. T_2 = T_x + \frac{c_{\text{т}} J_{\text{т}}}{c_{\text{x}} J_{\text{x}}} (T_{\text{т}} - T_1) = 20 \text{ }^\circ\text{C}.$$

2. Из второго закона Ньютона для верхней точки траектории и закона сохранения энергии:

$$m \frac{v^2}{l} = T + mg - k \frac{q^2}{l^2} \text{ и } \frac{mv_0^2}{2} = mg \cdot 2l + \frac{mv^2}{2}$$

получим

$$T = \frac{m}{l} \left(v^2 - 5gl + k \frac{q^2}{ml} \right), \quad v^2 = v_0^2 - 4gl,$$

или, поскольку $T \geq 0$ и $v^2 \geq 0$,

$$v_0^2 \geq 5gl - k \frac{q^2}{ml}, \quad v_0^2 \geq 4gl.$$

Отсюда следует, что

$$v_0 = 2\sqrt{gl}, \text{ если } mg \leq \frac{kq^2}{l^2}, \text{ и}$$

$$v_0 = \sqrt{5gl - \frac{kq^2}{ml}}, \text{ если } mg \geq \frac{kq^2}{l^2}.$$

$$3. \alpha = \arctg \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \text{ (или } \alpha = 45^\circ - \arctg \mu \text{)}.$$

4. Рассмотрим движение шарика вдоль оси y , направленной по стенке вверх, и найдем время движения между броском и первым ударом (оно же время до каждого последующего удара) о наклонную плоскость:

$$T = 2 \frac{v_y}{a_y} = 2 \frac{v \sin \beta}{g \cos \alpha}.$$

Теперь рассмотрим движение вдоль оси x , направленной вверх по наклонной плоскости, и найдем время между броском и ударом о стенку:

$$t = 2 \frac{v_x}{a_x} = 2 \frac{v \cos \beta}{a \sin \beta}.$$

Чтобы определить число ударов N , разделим t на T и возьмем целую часть:

$$N = \left[\frac{t}{T} \right] = [\text{ctg } \alpha \text{ctg } \beta].$$

5. Содержание в воздухе углекислого газа существенно меньше, чем кислорода, поэтому можно считать, что среднее расстояние между молекулой углекислого газа и соседней молекулой кислорода равно среднему расстоянию между молекулами кислорода. Тогда $n_{\text{к}} = 0,2 n_{\text{возд}} = 0,2 \frac{N_A}{V_{\text{мол}}}$,

где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ 1/моль – число Авогадро, $V_{\text{мол}} = 22,4$ л – молярный объем газа. С другой стороны, $n_k = \frac{1}{V_k} \approx \frac{1}{a^3}$, где V_k – объем, приходящийся на одну молекулу кислорода, a – среднее расстояние между соседними молекулами кислорода. Отсюда получаем

$$a \approx \sqrt[3]{\frac{V_{\text{мол}}}{0,2N_A}} \approx 6 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 6 \text{ нм}.$$

6. Рассмотрим сначала движение шариков после первого соударения. Проще всего это сделать, перейдя в систему центра масс, движущуюся со скоростью $v_{\text{ц.м.}} = \frac{mv}{m+M}$. В этой системе при столкновении каждый шарик меняет свою скорость на противоположную. До удара проекции скоростей шариков на горизонтальную ось были равны v и 0 относительно покоящейся (лабораторной) системы отсчета и $v - v_{\text{ц.м.}}$ и $-v_{\text{ц.м.}}$ в системе центра масс. После удара эти проекции меняют знак и станут равны $v_{\text{ц.м.}} - v$ и $v_{\text{ц.м.}}$. Наконец, перейдя в покоящуюся систему отсчета, получим значения $2v_{\text{ц.м.}} - v$ и $2v_{\text{ц.м.}}$ для проекций скоростей шариков на горизонтальную ось после первого столкновения. Если $m < M$, то $v_{\text{ц.м.}} < v/2$, а если $m > M$, то $v_{\text{ц.м.}} > v/2$. Таким образом, если был отклонен маленький шарик ($m < M$), то $2v_{\text{ц.м.}} - v < 0$, а $2v_{\text{ц.м.}} > 0$, т.е. после первого удара шарики движутся в разные стороны. Если же был отклонен большой шарик ($m > M$), то $2v_{\text{ц.м.}} - v > 0$ и $2v_{\text{ц.м.}} > 0$ – шарики после удара движутся в одну сторону.

Периоды колебаний обоих шариков равны, так как и точки подвеса, и центры масс шариков находятся на одном уровне. Сразу после первого удара оба шарика находятся в нижних точках своих траекторий. Поэтому через половину периода они оба вернуться в то же положение, а их скорости изменятся на противоположные. В этот момент они соприкоснутся и произойдет второе соударение. Та же ситуация будет происходить и в дальнейшем.

Рассмотрим скорости шариков до и после каждого столкновения. Перед первым столкновением они были равны v и 0 для отклоненного и неподвижного шариков соответственно. Обозначим скорости шариков сразу после столкновения через v_1 и v_2 . Перед вторым столкновением они станут равны $-v_1$ и $-v_2$. Чтобы найти скорости шариков после второго столкновения, можно воспользоваться свойством *обратимости* механических явлений: если видеозапись какого-либо механического движения воспроизвести в обратном направлении, то она будет выглядеть как запись другого, тоже возможного движения, в

котором скорости всех тел изменены на противоположные, а будущее и прошлое поменялись местами. В этом смысле второе столкновение является обратным процессом по отношению к первому. Следовательно, скорости шариков после второго столкновения будут противоположны скоростям перед первым столкновением и равны $-v$ и 0 соответственно. Таким образом, тот шарик, который был неподвижен перед первым столкновением, остановится после второго столкновения.

Ситуация перед третьим ударом в точности повторяет ситуацию перед первым: тот же самый шарик налетает на другой, неподвижный шарик. Поэтому каждый $(n+2)$ -й удар будет повторением n -го. В результате после каждого нечетного удара оба шарика движутся так же, как после первого, а после каждого четного удара один из шариков неподвижен.

КВАНТ

12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Аткарская, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
РЕДАКТОР**

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

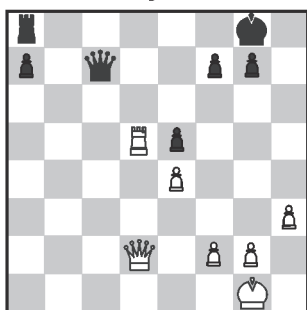
Телефон: +7 495 363-48-86,

http://capitalpress.ru

ВыжимаЯ КАМЕНЬ

Практически каждый чемпион мира обладал характерной особенностью, сильной чертой, которая выделяла его на фоне остальных игроков своего времени. Так, например, Михаил Ботвинник славился своей дебютной подготовкой, Михаил Таль – яркой атакующей игрой, а Тигран Петросян – тонким позиционным пониманием. Действующий чемпион мира Магнус Карлсен отличается умением выжимать максимум из любой позиции и выигрывать абсолютно ничейные с виду окончания.

М.Карлсен – Х.Накамура
Сент-Луис, 2018

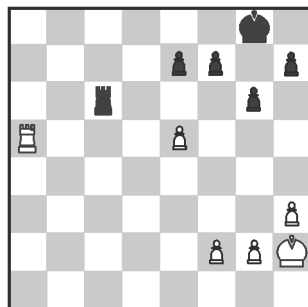


37. ♚ d7 ♜ c4 38. f3 ♜ c5+ 39. ♜ h2 ♚ c6 (ничью форсировало движение пешки: 39...a5! 40. ♜ a2 ♚ f8 41. ♜ d5 a4 42. ♚ f7 ♜ f7 43. ♜ a8+ ♜ h7 44. ♜ a4 ♜ f4+ 45. ♜ g1 ♜ c1+ с вечным шахом) 40. ♚ d6 ♜ c5 41. ♚ a6 ♜ e7 42. ♜ e3 ♜ h7 43. ♜ g3 ♜ b7 44. ♜ a3 f6 45. ♜ h2 ♜ c7 46. ♜ a1 ♜ b7 47. ♜ a5 ♜ d7 48. ♜ a2 ♜ e7 49. ♜ f2 ♜ b7 50. ♜ a2 ♜ e7. Пока черные просто «стоят на месте», белым практически невозможно добиться прогресса. Изменить позицию можно только за счет движения пешек на королевском фланге, однако при ферзях на доске это делает белого короля уязвимым к шахам. 51. ♜ d5 ♚ b8 52. ♜ a5!?

Ход ♚ b7, что ухудшит позицию ладьи в потенциальном ладейном эндшпиле. 52... ♚ b7. Этот ход – не ошибка, но лучше было продолжать держать стойку, вернувшись на a8.

53. ♜ e1 ♜ d7 54. ♜ h4+ ♜ g8 55. ♜ f2 ♜ f7 56. ♜ a2! ♜ a2 57. ♚ a2. После размена ферзей шансы белых на победу возросли, так как черные не могут привести в движение пешку a. Для достижения ничьей черным нужно будет в будущем пожертвовать ее для увеличения активности ладьи. 57... ♜ h7 58. ♚ a1 ♜ g6 59. h4 ♜ h5 60. ♜ h3 ♚ f7 61. g4+ ♜ h6 62. ♜ g3 g5. Черные строят крепость: ладья должна занять поле d7, а король будет передвигаться по полям f7 и g7, и белым крайне затруднительно противодействовать этому. 63. h5 ♜ g7 64. ♜ f2 ♚ b7 65. ♚ a3 ♜ h6 66. ♜ e3 a5? Похоже, американский гроссмейстер не выдержал долгой защиты и смешал в своих расчетах два принципиально разных плана обороны: крепость построить теперь не получится, как и отрезать белого короля. 67. ♚ a5 ♚ b3+ 68. ♜ f2 ♚ b2+ 69. ♜ g3 ♜ g7 70. ♚ a7+ ♜ g8 71. ♚ a1 ♜ g7 72. ♚ f1 ♚ a2 73. ♚ f2 ♚ a3 74. ♚ d2! Суть победного плана белых – при помощи ладьи белый король прорывается в лагерь черных. 74... ♚ a7 75. ♜ f2 ♜ f7 76. ♜ e2 ♚ b7 77. ♚ d3 ♚ a7 78. ♜ d2 ♜ e6 79. ♜ c3 ♜ e7 80. ♜ c4 ♚ c7+ 81. ♜ b5 ♚ c1 82. ♚ b3 ♜ f7 83. ♜ b6 ♚ c2 84. ♜ b7 ♚ c1 85. ♜ b8 ♜ g8 86. ♚ b6! ♜ g7 87. ♚ b7+ ♜ g8 88. ♚ c7 ♚ b1+ 89. ♜ c8 ♚ b3 90. ♜ d7. Имея проходную пешку h, белые могут позволить себе отдать пешки f3 и e4. 90... ♚ f3 91. ♜ e6 ♚ f4 92. h6 ♜ h8 93. ♚ b7 ♜ g8 94. ♚ g7+ ♜ h8 95. ♜ f7 ♚ e4 96. ♜ g6. Сочетая угрозы выигрыша пешек и мата, белые побеждают в партии. 96... ♚ a4 97. ♚ h7+. Черные сдались.

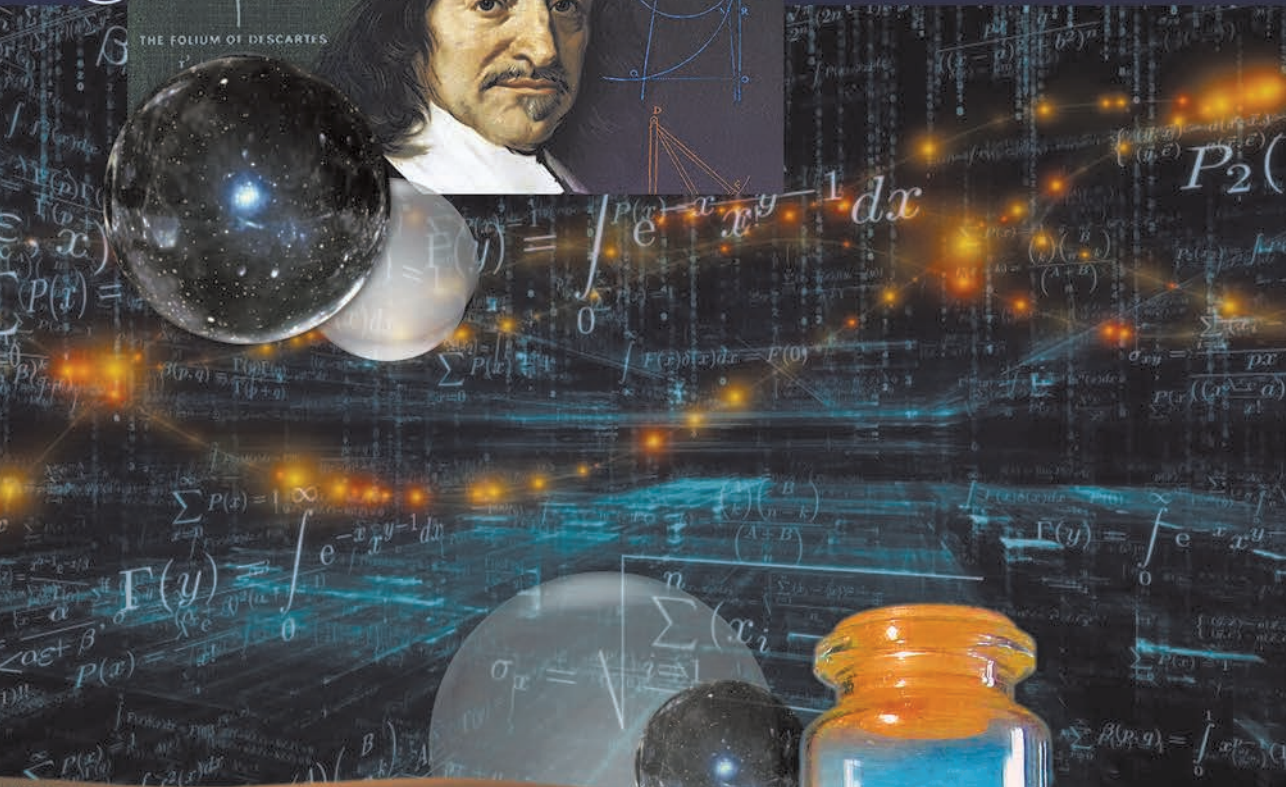
Р. Пономарев – М. Карлсен
Монако, 2010



Единственный шанс черных на победу – отдаленное положение пешки e5. 39... ♚ c4 40. ♜ g3 e6 41. f4 h6 42. ♜ f3 (42. ♜ g4 g5 43. ♜ h5!) 42... ♚ c3+ 43. ♜ f2. И здесь лучше было ♜ g4. Теперь пешка e5 становится уязвимой. 43... g5 44. fg hg 45. ♚ a4 ♜ g7 46. ♚ g4 ♜ h6 47. g3 ♜ h5 48. ♚ a4 ♜ g6 49. ♚ a5 ♚ d3 50. h4 gh 51. gh ♚ d7 52. ♜ e3 ♚ b7 53. ♜ f4 ♚ b4+ 54. ♜ g3 ♜ f5 55. ♚ a7 ♚ g4+ 56. ♜ f3 ♚ g7 57. ♚ a5 ♚ g1 58. ♚ b5 ♚ a1 59. ♜ c5 ♚ a3+ 60. ♜ f2 ♜ e4 61. h5 ♚ a8 62. ♜ g3 ♜ f5 63. ♜ h4 ♚ a4+ 64. ♜ g3 ♚ g4+ 65. ♜ f3 ♚ f4+ 66. ♜ g3 ♜ g5 67. h6 ♚ g4+ 68. ♜ f3 ♚ h4 69. ♚ c7 ♜ g6 70. ♚ c8 ♚ h6 71. ♜ g4 ♚ h1 72. ♚ g8+? (после правильного 72. ♜ f4! ♚ h4+ 73. ♜ e3 ♜ f5 74. ♚ c7 ♚ h7 75. ♜ d4 белые удерживают пешку) 72... ♜ h7 73. ♚ a8 ♚ f1 74. ♚ a2 ♜ g6 75. ♚ g2 ♚ f5! Белый король отрезан, а черный идет на d5 – позиция черных технически выиграна. 76. ♚ e2 ♜ g7 77. ♜ g3 ♜ f8 78. ♚ e4 ♜ e7 79. ♜ g4 ♜ d7 80. ♚ d4+ ♜ c6 81. ♚ d6+ ♜ c7 82. ♚ d1 ♚ e5 83. ♚ f1 f5+ 84. ♜ g5 ♜ d6 85. ♜ f6 ♚ e4 86. ♚ d1+ ♜ c5 87. ♚ d8 f4 88. ♜ g5 e5 89. ♜ g4 ♚ e3 90. ♚ d1 ♜ c4 91. ♚ d2 f3 92. ♜ g3 e4 93. ♜ f2 ♚ d3 94. ♚ a2 ♜ d4 95. ♚ a4+ ♜ e5 96. ♜ g3 ♚ d2 97. ♚ a5+ ♜ d4 98. ♚ a4+ ♜ e3 99. ♚ a3+ ♜ e2 100. ♜ f4 f2. Белые сдались.

А. Русанов

Игрушки с физикой



ВОЗМОЖНО ЛИ ЭТО?

Сплошной стеклянный шарик «всплывает» в простом песке.
Как такое может быть?

(Подробнее – на с. 35 внутри журнала)